

**JULIANA LUÍSA MÜLLER**

**ELABORAÇÃO DE UM PÓS-PROCESSADOR NUMÉRICO  
3D PARA CÁLCULOS ELETROMAGNÉTICOS BASEADOS  
NO MÉTODO DO “CAMPO FONTE”**

**FLORIANÓPOLIS**

**2008**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**ELABORAÇÃO DE UM PÓS-PROCESSADOR NUMÉRICO  
3D PARA CÁLCULOS ELETROMAGNÉTICOS BASEADOS  
NO MÉTODO DO “CAMPO FONTE”**

Dissertação submetida à  
Universidade Federal de Santa Catarina  
como parte dos requisitos para a  
obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica

**JULIANA LUÍSA MÜLLER**

Florianópolis, Agosto de 2008.

# **ELABORAÇÃO DE UM PÓS-PROCESSADOR NUMÉRICO 3D PARA CÁLCULOS ELETROMAGNÉTICOS BASEADOS NO MÉTODO DO “CAMPO FONTE”**

JULIANA LUÍSA MÜLLER

‘Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área de Concentração *Eletromagnetismo e Dispositivos Eletromagnéticos*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.’

---

Prof. João Pedro Assumpção Bastos, Dr. d’Etat  
Orientador

---

Prof. <sup>a</sup>. Kátia Campos de Almeida, Ph. D.  
Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:

---

Prof. João Pedro Assumpção Bastos, Dr. d’Etat  
Presidente

---

Prof. Walter Pereira Carpes Junior, Dr.

---

Prof. Mauricio Valencia Ferreira da Luz, Dr.

---

Prof. Nelson Sadowski, Dr.

Este trabalho é dedicado a toda a minha  
família, em especial:  
aos meus pais, Marlies e Jorge,  
à minha irmã, Isabel,  
e ao meu namorado, Bruno.

# Agradecimento

Gostaria de agradecer a diversas pessoas que colaboraram para tornar possível este trabalho:

ao meu orientador, Prof. João Pedro Assumpção Bastos, pela oportunidade de realizar esta dissertação, pelo tempo dedicado, pelo incentivo e pelo conhecimento compartilhado;

ao Prof. Nelson Sadowski, pela atenção ao ensinar sobre o funcionamento de máquinas elétricas, pela dedicação e por participar da banca de avaliação;

aos demais professores membros da banca examinadora, Mauricio Valencia Ferreira da Luz e Walter Pereira Carpes Junior, pela honra de integrarem a banca, e pela importante contribuição para a conclusão deste trabalho;

aos demais professores do Grucad, pela motivação e pelo conhecimento transmitido;

à secretária executiva do Grucad, Celly Dulcemar Melo, pela atenção e amizade;

aos colegas do Grucad, pela amizade e por proporcionarem um agradável ambiente de trabalho;

ao secretário do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Wilson Silva Costa, pela colaboração;

à CAPES, pelo suporte financeiro;

à Embraco, e em especial ao Luiz von Dokonal, pela motivação e por ter prontamente fornecido os dados do motor de fluxo axial utilizados neste trabalho;

ao meu namorado, Bruno Akihiro Tanno Iamamura, pelo apoio, paciência e dedicação constantes, tanto no campo pessoal como profissional;

à minha família, que sempre me incentivou e me ofereceu seu carinho e apoio incondicional;

às demais pessoas com as quais convivi durante este período, e que de alguma forma contribuíram com este trabalho.

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários  
para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

# **ELABORAÇÃO DE UM PÓS-PROCESSADOR NUMÉRICO 3D PARA CÁLCULOS ELETROMAGNÉTICOS BASEADOS NO MÉTODO DO “CAMPO FONTE”**

**Juliana Luísa Müller**

Agosto/2008

Orientador: João Pedro Assumpção Bastos, Dr. d'Etat

Área de Concentração: Eletromagnetismo e Dispositivos Eletromagnéticos.

Palavras-chave: Eletromagnetismo, modelagem tridimensional, pós-processador.

Número de Páginas: x + 52

**RESUMO:** Esta dissertação trata do estudo do método do campo fonte de cálculo 3D de campos e do desenvolvimento de um pós-processador numérico para cálculo eletromagnético tridimensional. O pós-processador foi realizado em linguagem FORTRAN e constitui um dos módulos do *software* FEECAD, desenvolvido no laboratório no qual foi feito este trabalho, o GRUCAD. Antes, a análise tridimensional de estruturas relativamente complexas (como máquinas elétricas) era impraticável. Para transpor esse obstáculo, foi recentemente adquirido pelo laboratório o programa I-DEAS, que permite o desenho, a confecção da malha de elementos finitos e a inserção das condições de contorno do problema. Entretanto, o I-DEAS não é feito para cálculo eletromagnético, de forma que foi necessário utilizar os *solvers* do FEECAD, tornando-os compatíveis, e confeccionar um pós-processador numérico correspondente, o desenvolvido neste trabalho. Por fim, foi realizada uma simulação do caso magnetostático para uma máquina de fluxo axial, que requer análise tridimensional e serviu como exemplo prático e para comprovar o funcionamento correto do programa.

Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements of the degree of Master in Electrical Engineering.

# **DEVELOPMENT OF A NUMERICAL POST-PROCESSOR FOR 3D ELECTROMAGNETIC CALCULATION BASED ON THE “SOURCE-FIELD” METHOD**

JULIANA LUÍSA MÜLLER

August/2008

Advisor: João Pedro Assumpção Bastos, Dr. d'Etat

Area of Concentration: Electromagnetism and Electromagnetic Devices.

Keywords: Electromagnetics, three-dimensional modeling, post-processor.

Number of Pages: x + 52

**ABSTRACT:** This dissertation deals with the study of the source-field method, used for 3D field calculation, and the development of a numerical post-processor for three-dimensional electromagnetic field calculation. The post-processor is written in FORTRAN language and it is part of the FEECAD system, which has been developed in GRUCAD, the laboratory of this project. Formerly, the three-dimensional analysis of relatively complex structures (such as electrical machines) was impractical. In order to solve this problem, GRUCAD recently purchased the software I-DEAS, which allows the design of the device, finite element meshing and insertion of boundary conditions. However, I-DEAS was not conceived for electromagnetic field calculation, so it was necessary to use the solvers in FEECAD, making them compatible with the so-called “universal files” (created by I-DEAS), and developing a suitable numerical post-processor, the subject of this project. At last, a magnetostatic simulation for an axial flux machine has been accomplished. This kind of machine requires three-dimensional analysis and its simulation is useful as a practical example and to point on the software’s correct performance.

# Sumário

<b>LISTA DE SÍMBOLOS.....</b>	<b>VIII</b>
<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>IX</b>
<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1 MOTIVAÇÃO .....	1
1.2 POSICIONAMENTO DO PROBLEMA .....	2
1.3 OBJETIVOS E MÉTODOS .....	2
<b>2. MÉTODOS NUMÉRICOS E TÉCNICAS GRÁFICAS COMPUTACIONAIS .....</b>	<b>4</b>
2.1 ELETROMAGNETISMO .....	4
2.1 MÉTODO DO CAMPO FONTE.....	5
2.2 A CONSTRUÇÃO DE ÁRVORES.....	10
2.3 O USO DO PROGRAMA I-DEAS.....	16
<b>3. ELABORAÇÃO DO PÓS-PROCESSADOR.....</b>	<b>18</b>
3.1 TIPOS DE SUPERFÍCIES .....	18
3.1.1 <i>Superfícies planas retangulares</i> .....	18
3.1.2 <i>Quadriláteros planos</i> .....	19
3.1.3 <i>Superfícies curvas</i> .....	20
3.2 CÁLCULO DE FORÇAS E FLUXOS.....	24
<b>4. APLICAÇÃO PRÁTICA .....</b>	<b>26</b>
4.1 CIRCUITO MAGNÉTICO COM BOBINA .....	26
4.2 CIRCUITO MAGNÉTICO COM ÍMÃ PERMANENTE .....	29
4.3 MOTOR DE FLUXO AXIAL.....	34
4.4 CÁLCULOS ANALÍTICO E NUMÉRICO .....	37
4.4.1 <i>Uma bobina energizada</i> .....	38
4.4.2 <i>Uma fase energizada</i> .....	41
4.4.3 <i>Duas fases energizadas</i> .....	44
<b>5. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS .....</b>	<b>49</b>
5.1 CONCLUSÕES FINAIS .....	49
5.2 PERSPECTIVAS E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS.....	50
<b>6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>51</b>



# Lista de Símbolos

<b>A</b>	potencial vetor magnético [Wb/m]
<b>B</b>	indução magnética [T]
<b>D</b>	indução elétrica [C/m <sup>2</sup> ]
<b>E</b>	campo elétrico [V/m]
<b>F</b>	força [N]
<b>H</b>	campo magnético [A/m]
<b>J</b>	densidade superficial de corrente [A/m <sup>2</sup> ]
<b>L</b>	indutância [H]
<b>N</b>	função de interpolação
<b>W</b>	função de ponderação
<b>w</b>	função de forma
$\partial t$	derivada parcial em relação ao tempo
$\epsilon$	permissividade elétrica [F/m]
$\mu$	permeabilidade magnética [H/m]
$\mu_0$	permeabilidade magnética do espaço livre [H/m]
$\rho$	densidade volumétrica de carga [C/m <sup>3</sup> ]
$\sigma$	condutividade elétrica [S/m]
$\phi$	fluxo magnético [Wb]
$\Omega$	potencial escalar magnético [A.espiras]
div	operador divergente
grad	operador gradiente
rot	operador rotacional
$\cdot$	produto escalar
$\times$	produto vetorial

# Lista de Figuras

2.1	Diagrama de Tonti para a magnetostática [3]	p. 7
2.2	Funções de Whitney [7] correspondentes respectivamente às arestas 1-2, 2-3 e 3-1.	p.9
2.3	Circulação do campo magnético e densidade de corrente	p. 10
2.4	Árvore de arestas bidimensional	p. 13
2.5	Pseudo-arestas ( $e_1$ e $e_2$ ) em três elementos	p. 14
2.6	Malha com dez elementos tetraédricos	p. 14
2.7	Elementos da malha unidos por pseudo-arestas	p. 15
2.8	Árvore de faces para uma malha de dez tetraedros	p. 15
3.1	Superfície plana, paralela ao eixo x	p. 19
3.2	Superfície quadrilateral plana irregular	p. 20
3.3	Superfície interna a um dos dentes de um motor de fluxo axial	p. 21
3.4	Cálculo de gama, com o ponto inicial no primeiro ou segundo quadrante	p. 22
3.5	Cálculo de gama, com o ponto inicial no terceiro ou quarto quadrante	p. 23
4.1	Dimensões do circuito magnético com bobina	p. 26
4.2	Malha do circuito magnético com bobina	p. 27
4.3	Indução no entreferro do circuito com bobina	p. 28
4.4	Indução nas partes de ferro do circuito	p. 29
4.5	Malha de elementos finitos da estrutura com ímã permanente	p. 30
4.6	Dimensões em milímetros do circuito magnético com ímã permanente	p. 30
4.7	Indução magnética no entreferro do circuito com ímã permanente	p. 32
4.8	Indução magnética no ferro, em circuito magnético com ímã permanente	p. 33
4.9	Indução magnética em circuito com ímã, incluindo os vetores na caixa de ar	p. 33
4.10	Posição dos componentes do circuito magnético, incluindo a camada de ar	p. 34
4.11	Foto da máquina de fluxo axial	p. 35
4.12	Esquemas do estator e do rotor da máquina estudada	p. 35
4.13	Malha e posição dos principais componentes do motor de fluxo axial	p. 36
4.14	Ligação das bobinas no motor de fluxo axial	p. 36

4.15	Circuito magnético simplificado entre dois dentes	p. 37
4.16	Circuito magnético simplificado para uma bobina energizada	p. 38
4.17	Superfície do dente (em azul) e quadrilátero (em azul e laranja)	p. 40
4.18	Densidade de fluxo magnético nos dentes e no rotor inferior da máquina	p. 43
4.19	Indução magnética em metade da máquina, com uma fase alimentada	p. 44
4.20	Fluxo magnético num motor de fluxo axial com excitação em duas fases	p. 46
4.21	Vetores de indução nos dentes e rotores, em metade da máquina	p. 46
4.22	Indução magnética na máquina, com 1 Ampère nas fases 1 e 2	p. 48
4.23	Distribuição dos campos na máquina, com 3 Ampères nas fases 1 e 2	p. 48

# 1. Introdução

---

## 1.1 Motivação

O uso de dispositivos magnéticos se torna a cada dia mais necessário ao homem, seja em eletrodomésticos, em geração de energia elétrica ou em outros tipos de equipamentos. Mesmo em segmentos como o automobilístico, no qual sempre os motores a combustão reinaram, as máquinas elétricas se tornam uma alternativa muito promissora para reduzir a emissão de gases poluentes.

Diferentes tipos de máquinas e de dispositivos magnéticos vêm sendo desenvolvidos com o intuito de suprir esta demanda. Esses equipamentos proporcionam a minimização das dimensões, a maior eficiência, o menor custo e, muitas vezes, uma alternativa ecologicamente superior aos métodos freqüentemente utilizados.

São as equações de Maxwell que descrevem o comportamento eletromagnético desses equipamentos. Porém, normalmente a complexidade dos cálculos (interação entre diferentes materiais, geometrias irregulares, demais aspectos construtivos) faz com que seja impossível realizar o cálculo analítico relativo a esse dispositivo.

Esse tipo de análise se tornou possível com o advento dos computadores digitais, fazendo com que fossem concebidas diversas técnicas de cálculo numérico, citando-se como exemplo os métodos de elementos finitos, dos momentos, das diferenças finitas, entre outros.

Especialmente para o cálculo eletromagnético em baixas frequências, utiliza-se geralmente o método de elementos finitos. Para diversos tipos de dispositivos, notadamente os que apresentam uma geometria (estrutural ou de fluxo magnético) predominante em duas dimensões, a análise 2D é suficiente para fornecer resultados satisfatórios. No entanto, alguns tipos de equipamentos requerem uma análise tridimensional para que se obtenha um resultado mais preciso e exato em relação ao dispositivo real. O desenvolvimento de um programa de cálculos eletromagnéticos em três dimensões é o assunto desta dissertação.

## 1.2 Posicionamento do problema

O GRUCAD (Grupo de Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos), da UFSC, desenvolveu uma ferramenta de cálculo eletromagnético tridimensional por elementos finitos chamada FEECAD, composta por diversos módulos, segundo a função: inserção dos dados do problema, *solvers* conforme o método de cálculo (elementos nodais, elementos de aresta, campo fonte) e o tipo de resultado (levando-se em conta ou não as correntes induzidas, componentes imaginárias, diferentes frequências ou caso estático, excitação por tensão ou corrente na(s) bobina(s)), pós-processadores que apresentam resultados de forma gráfica e numérica.

A entrada dos dados geométricos do dispositivo a ser simulado é geralmente efetuada através das coordenadas e dimensões de cada parte do dispositivo, não oferecendo dificuldade, desde que a estrutura não contenha muitos detalhes. No caso de uma máquina elétrica, entretanto, essa tarefa se torna mais penosa.

Foi essa uma das razões de o laboratório ter adquirido em 2007 o *software* I-DEAS (“NX I-DEAS”, desenvolvido pela empresa Siemens), que permite o desenho da estrutura a ser analisada de forma mais intuitiva e ágil. Trata-se de um programa de cálculo tridimensional por elementos finitos que comporta todas as etapas, desde o desenho até o pós-processador.

Contudo, o *software* não foi concebido para realizar cálculos eletromagnéticos. Optou-se então por se efetuar a entrada dos dados geométricos do dispositivo, criar a malha de elementos finitos e inserir as condições de contorno através do I-DEAS, em seguida enviar os dados correspondentes ao FEECAD, em que são inseridas as demais informações (como correntes e os diferentes materiais da estrutura) e são executados os cálculos. Pôde-se então optar pelo pós-processador gráfico do I-DEAS que, no entanto, não oferece resultados numéricos para cálculos eletromagnéticos. Para suprir essa lacuna, foi criado um pós-processador, que faz parte do sistema FEECAD.

## 1.3 Objetivos e métodos

O pós-processador numérico, que constitui um módulo do FEECAD, é o assunto do trabalho do qual trata esta dissertação. As transformações que foram efetuadas permitem calcular resultados sobre vários tipos de superfícies, incluindo superfícies planas

quadrilaterais irregulares (com lados paralelos ou não), inclinadas ou não, e curvas com eixos paralelos aos eixos x, y e z do plano cartesiano. Dessa forma, o projeto desenvolvido possibilita que sejam feitos cálculos estáticos em diversos tipos de estruturas, mesmo as que possuem muitos detalhes na sua geometria, como é o caso de alguns tipos de máquinas elétricas.

Para tal objetivo, foi realizado um estudo dos métodos já existentes de cálculo por elementos finitos e da linguagem de programação FORTRAN. Em seguida, foi estudado o programa I-DEAS, os arquivos que ele gera, e como fazer o acoplamento entre o I-DEAS e o FEECAD. Com o programa de cálculo pronto, foi feito um estudo de como poderiam ser apresentados os resultados e foi elaborado um pós-processador que efetuasse os demais cálculos de grandezas eletromagnéticas numa estrutura tridimensional e os apresentasse de forma simples, de acordo com o que se deseja.

Durante o desenvolvimento do programa, foram simulados diversos circuitos magnéticos simples, para verificar seu funcionamento e comprovar sua eficácia. No entanto, a vantagem do pós-processador é permitir a modelagem de estruturas mais complexas. Para isso, foi simulada uma máquina (no caso, um motor de fluxo axial), que não pode ser satisfatoriamente descrita e analisada de forma bidimensional. Por último, foram apresentados os resultados obtidos, comparando-os com alguns cálculos analíticos efetuados previamente.

## 2. Métodos numéricos e técnicas gráficas computacionais

---

Neste capítulo será abordada a teoria dos temas fundamentais a este projeto: o eletromagnetismo e os métodos numéricos tradicionalmente utilizados para a resolução de problemas eletromagnéticos. Também será explicada a forma segundo a qual serão utilizados os programas I-DEAS e FEECAD, com destaque para o pós-processador desenvolvido nesta dissertação.

### 2.1 Eletromagnetismo

As equações de Maxwell formam um conjunto de quatro leis que, junto com as relações constitutivas, regem os fenômenos eletromagnéticos. Para um caso geral, essas expressões são apresentadas a seguir.

Equações de Maxwell:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (2.4)$$

Relações constitutivas:

$$\mathbf{B} = \|\mu\| \mathbf{H} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{D} = \|\epsilon\| \mathbf{E} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{J} = \|\sigma\| \mathbf{E} \quad (2.7)$$

Nessas equações estão presentes as grandezas eletromagnéticas, a saber: o campo magnético,  $\mathbf{H}$  [A/m], a indução magnética ou densidade de fluxo magnético,  $\mathbf{B}$  [T], o campo elétrico,  $\mathbf{E}$  [V/m], a indução elétrica ou densidade de fluxo elétrico,  $\mathbf{D}$  [C/m<sup>2</sup>], a

densidade superficial de corrente,  $\mathbf{J}$  [A/m<sup>2</sup>], e a densidade volumétrica de carga,  $\rho$  [C/m<sup>3</sup>]. Essas grandezas são vetores, salvo a densidade volumétrica de carga.

As equações constitutivas relacionam as grandezas acima apresentadas com auxílio da permeabilidade magnética  $\mu$ , da permissividade elétrica  $\varepsilon$  e da condutividade elétrica  $\sigma$ . Estas, por sua vez, são representadas pelos seguintes tensores:

$$\|\mu\| = \begin{bmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix}, \quad \|\varepsilon\| = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \text{ e } \|\sigma\| = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

São as expressões acima apresentadas que permitem o cálculo de grandezas eletromagnéticas em diversos tipos de estruturas, e que formam a base da teoria aplicada no trabalho do qual trata esta dissertação.

## 2.1 Método do campo fonte

Segundo o método de elementos finitos [3], o volume a ser analisado deve ser dividido em um número finito de elementos (no caso deste trabalho, tetraédricos), formando uma malha. As grandezas são calculadas localmente, segundo as informações que se possuem (coordenadas dos nós, os nós que fazem parte de cada elemento, material de cada elemento, ímãs permanentes, correntes de excitação e condições de contorno). Como se trata de uma aproximação, pode-se afirmar que quanto maior for o número de elementos, mais precisa será a solução.

Para resolver um problema através do método de elementos finitos, é necessário resolver um sistema de equações que varia conforme o tipo de elemento que se possui e de resposta que se deseja [4]. Essas equações possuem um termo conhecido como função de interpolação, e que é diferente para cada tipo de elemento. Por exemplo, podem-se resolver sistemas de elementos nodais, de arestas ou de faces, a que correspondem respectivamente funções de Whitney do tipo zero, um e dois.

Os elementos nodais são apropriados para a interpolação de grandezas escalares, com auxílio das funções de interpolação do tipo zero. Para elementos de arestas, são utilizadas funções de Whitney do tipo um, que são convenientes quando se desejam calcular grandezas como campos elétricos e magnéticos, que possuem componente



tangencial contínua, mesmo entre materiais diferentes. Os elementos de face são mais adequados ao cálculo de grandezas do tipo “fluxo”, como a densidade de corrente, densidade de fluxo elétrico e magnético, já que impõem continuidade da corrente normal.

Será abordado nesta dissertação o caso magnetostático. Nesta situação não há variação temporal nas grandezas eletromagnéticas. Assim, as expressões  $\partial \mathbf{D}/\partial t$  e  $\partial \mathbf{B}/\partial t$ , presentes nas equações (2.1) e (2.3), são nulas, e os campos elétrico e magnético estão desacoplados. Portanto, as expressões (2.1) e (2.3) são expressas respectivamente como:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2.8)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (2.9)$$

Os meios foram considerados isotrópicos, de forma que cada uma das grandezas representadas por tensores (permeabilidade magnética, permissividade elétrica e condutividade elétrica) será representada por um escalar.

Enzo Tonti [18] formulou um diagrama que relaciona as grandezas eletromagnéticas conforme os tipos das funções de Whitney, que pode ser visto na figura 2.1. Observa-se, nesse diagrama, que se pode descrever o campo magnético  $\mathbf{H}$  em função do potencial escalar magnético  $\Omega$ , através da equação  $\mathbf{H} = -\text{grad } \Omega$ .

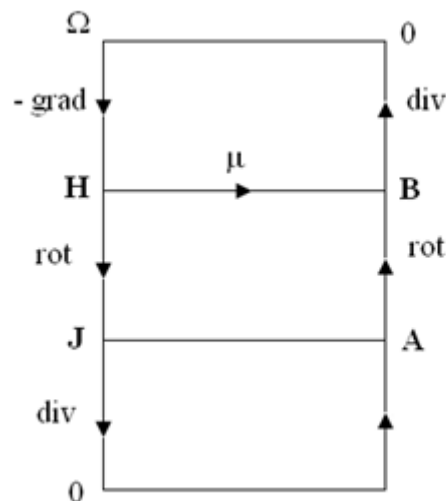


Figura 2.1: Diagrama de Tonti para a magnetostática [3]

Segundo o método utilizado, conhecido como campo fonte [2], as correntes de excitação (normalmente presentes nas bobinas) são representadas pelo campo

magnético que produzem, denominado  $\mathbf{H}_s$ . Dessa forma, o campo magnético total é dividido em duas parcelas: uma referente às correntes nas bobinas ( $\mathbf{H}_s$ ) e outra referente às condições de contorno (grad  $\Omega$ ):

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s - \text{grad } \Omega \quad (2.10)$$

Assim,

$$\text{rot } (\mathbf{H}_s - \text{grad } \Omega) = \mathbf{J} \quad (2.11)$$

$$\text{rot } \mathbf{H}_s - \text{rot } (\text{grad } \Omega) = \mathbf{J} \quad (2.12)$$

$$\text{grad } \Omega = 0 \quad \therefore \quad \text{rot } (\text{grad } \Omega) = 0$$

$$\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{H}_s \quad (2.13)$$

Substituindo-se a equação (2.10) na relação (2.5) se obtém

$$\mathbf{B} = \mu (\mathbf{H}_s - \text{grad } \Omega) \quad (2.14)$$

Assim, a equação (2.2) se torna:

$$\text{div } \mu (\mathbf{H}_s - \text{grad } \Omega) = 0 \quad (2.15)$$

A expressão (2.15) será utilizada ao se aplicar o método dos resíduos ponderados [7] para resolver o sistema de elementos finitos. Pode-se observar que em vez de se utilizar a densidade superficial de corrente ( $\mathbf{J}$ ), esta é representada pelo campo magnético que gera ( $\mathbf{H}_s$ ). Esse fato leva à introdução de um aspecto interessante do método do campo fonte: a construção de árvores de arestas, que será discutida na seção 2.2.

A equação (2.2),  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , informa que o fluxo magnético é conservativo, ou seja, num determinado volume, a soma do fluxo magnético deve ser nula. Escolhe-se então um domínio de cálculo  $D$ , e uma função de teste ou de ponderação,  $W$ , de forma a anular a integral da expressão (2.16) no domínio  $D$ .

$$\int_D W \text{ div } \mathbf{B} \, dv = 0 \quad (2.16)$$

Observa-se [1] que, como

$$\text{div } (W \mathbf{B}) = W \text{ div } \mathbf{B} + \mathbf{B} \text{ grad } W,$$

a expressão (2.16) também pode ser expressa da seguinte forma:

$$\int_D \operatorname{div} (W \mathbf{B}) \, dv - \int_D (\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad} W) \, dv = 0 \quad (2.17)$$

Aplicando-se o teorema da divergência, tem-se que

$$0 = \int_D W \operatorname{div} \mathbf{B} \, dv = \oint_{S(V)} W (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}) - \int_D (\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad} W) \, dv \quad (2.18)$$

e, como os domínios das integrais à direita da igualdade são diferentes, elas são independentes. Essa é a expressão que deve ser resolvida. Assim, substituindo-se  $\mathbf{B}$  pela expressão (2.10) na parte relativa ao domínio  $D$ , à direita na expressão (2.18), obtém-se:

$$\int_D \mu (\mathbf{H}_s - \operatorname{grad} \Omega) \cdot \operatorname{grad} W \, dv = 0 \quad (2.19)$$

Descrevendo-se a expressão acima tem-se:

$$\int_D \mu (\operatorname{grad} \Omega \cdot \operatorname{grad} W) \, dv = \int_D \operatorname{grad} W \cdot \mu \mathbf{H}_s \, dv \quad (2.20)$$

Segundo o método de Galerkin [7], utilizado para resolver problemas com elementos finitos, as funções de ponderação,  $W$ , são iguais às funções de interpolação,  $N$ . Há uma função  $N$  para cada nó, e que deve valer 1 neste nó e 0 nos demais. Pode-se descrever o campo fonte em termos de elementos de aresta, utilizando as funções de Whitney para elementos de aresta ( $\mathbf{w}$ ) e a circulação do campo magnético ( $H_{sc}$ ) ao longo das arestas de cada face do elemento:

$$\mathbf{H}_s = \mathbf{w} H_{sc} \quad (2.21)$$

Como exemplo, para um elemento triangular linear, pode ser vista, na figura 2.2, a representação gráfica das funções de forma correspondentes à equação (2.21).

Como se está trabalhando com elementos tridimensionais, para cada uma das faces de um tetraedro - que possui seis arestas, sendo três por face - a expressão (2.21) tem a seguinte forma, e seus termos, as seguintes dimensões:

$$\mathbf{H}_s(3,1) = \mathbf{w}(3,6) H_{sc}(6,1) \quad (2.22)$$

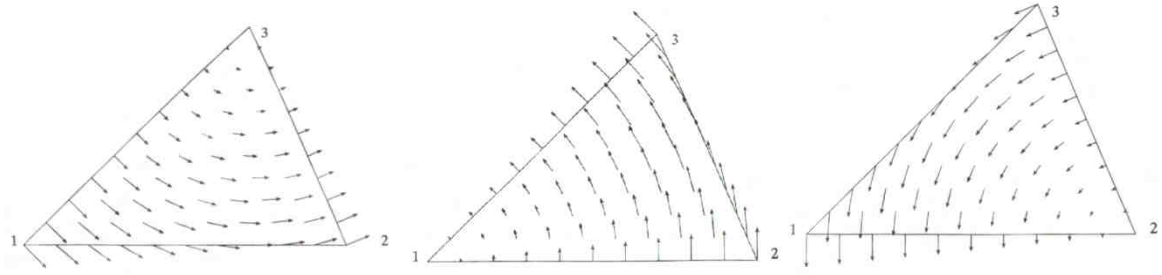


Figura 2.2: Funções de Whitney [7] correspondentes às arestas 1-2, 2-3 e 3-1, respectivamente.

O potencial escalar magnético, sendo uma grandeza escalar, é definido com auxílio das funções de forma nodais. Assim, definindo-se os potenciais em cada nó do tetraedro como  $\Omega_i$ , e com auxílio das funções de interpolação, tem-se:

$$\Omega(1,1) = N_i(1,4) \Omega_i(4,1) \quad (2.23)$$

Aplicando-se o operador gradiente, a expressão passa a ser um vetor:

$$\text{grad } \Omega(3,1) = \text{grad} [N_i(3,4) \Omega_i(4,1)] \quad (2.24)$$

Dessa forma, para o tetraedro  $n$  e para os nós  $j$  do tetraedro (com  $j$  variando de 1 a 4), deve-se resolver o termo

$$\int_{V_n} \text{grad } N_{ni}^t \cdot \text{grad } N_{nj} \, dv \, \Omega_j \quad (2.25)$$

Para resolver o lado direito da expressão (2.20), tem-se, para o elemento  $n$ :

$$\int_{V_n} \text{grad } N^t \cdot \mu \mathbf{H}_s \, dv \quad (2.26)$$

A expressão (2.21) a transforma em

$$\int_{V_n} \text{grad } N^t \cdot \mu \mathbf{w} \, H_{sc} \, dv \quad (2.27)$$

Quanto ao termo relativo à superfície que determina um volume, na expressão (2.18), sabe-se que neste caso essas superfícies são as  $n$  faces dos tetraedros que possuem condição de contorno. Com auxílio da equação (2.14), tem-se:

$$\int_{S_n} N_n \mu (\mathbf{H}_s - \text{grad } \Omega) \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (2.28)$$

que também pode ser escrita da seguinte forma:

$$-\int_{S_n} N_n \mu \text{grad } \Omega \cdot d\mathbf{s} + \int_{S_n} N_n \mu \mathbf{H}_s \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (2.29)$$

As condições de contorno podem ser condições de Dirichlet (quando se impõe um valor para  $\Omega$ ) ou de Neumann (as demais condições de contorno, sem que haja um valor imposto para  $\Omega$ ). No primeiro caso, ambos os termos da equação (2.29) são nulos [3]. No segundo, a função de forma  $N_n$  não pode ser considerada nula, e a equação deve ser resolvida.

## 2.2 A construção de árvores

Ao se calcular a circulação do campo magnético nas arestas pertencentes a determinada face de um elemento, observa-se que, conhecendo-se a densidade de corrente que atravessa essa face e os valores de campo em todas as arestas dessa face menos em uma, o valor nesta última pode ser calculado. Tomando-se como exemplo a figura 2.3, que representa um elemento tetraédrico, e as grandezas citadas, verifica-se a afirmação anterior através da lei de Ampère (expressão 2.30):

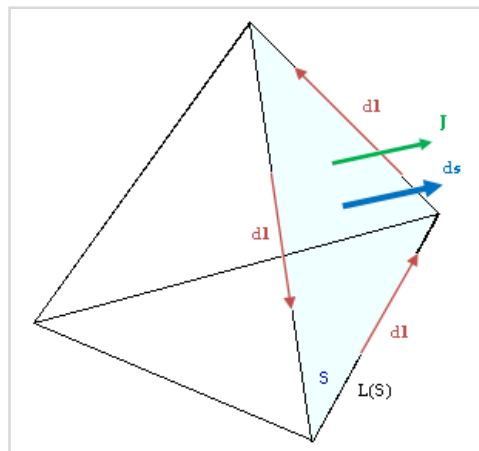


Figura 2.3: Circulação do campo magnético e densidade de corrente

$$\int_{L_1} \mathbf{H}_{s1} \cdot d\mathbf{l}_1 + \int_{L_2} \mathbf{H}_{s2} \cdot d\mathbf{l}_2 + \int_{L_3} \mathbf{H}_{s3} \cdot d\mathbf{l}_3 = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.30)$$

A partir da necessidade de se ter o valor dos campos sempre em todas as arestas menos uma de cada face, surge o conceito de árvore de arestas. Esta consiste num caminho aberto que passe apenas uma vez por todos os nós, com um número de arestas que equivale ao número de nós menos um.

Para construir a árvore de arestas serão utilizados arranjos como, por exemplo, o denominado  $k$  (número de arestas, 2), que indica os nós pertencentes a cada aresta, e arranjos que informam se determinado nó ou aresta já faz parte da árvore ou não. Diz-se que a aresta número 1 pertence à árvore, e então se inicia uma sequência de iterações, que será repetida para cada aresta, a partir da segunda. Inicialmente são verificadas as arestas com condição de Neumann, em seguida as arestas com condição de Dirichlet e, por último, as arestas no interior do domínio de cálculo.

Os arranjos utilizados são os seguintes:

- $k(\text{nare}, 2)$ : define os nós pertencentes às “nare” arestas;
- $\text{kno}(\text{nno})$ : vale 1 se o nó pertence à árvore e 0 se não pertence;
- $\text{kare}(\text{nare})$ : vale 1 se o nó pertence à árvore e 0 se não pertence;
- $\text{karv}(\text{nnodes}-1)$ : numeração das arestas que pertencem à árvore;
- $\text{ic}$ : número de arestas que pertencem à árvore.

Inicialmente os contadores “iloop” e “imemo” são zerados. Como se afirma que a primeira aresta pertence à árvore, faz-se  $\text{ic} = 1$ . A seguir será apresentada a sequência de comandos na forma de pseudocódigo, e logo depois, a explicação correspondente:

início

iloop = iloop + 1

se ( imemo = ic ) retorna

senão, faz imemo = ic

fim se

para ( i = 2 a nare ) faça:

se ( kare(i) = 1 ) vai a “fim para”

n1 = k(i,1)

n2 = k(i,2)

```

se ( kno(n1) = 1 e kno(n2) = 0 ) então
    ic = ic + 1
    karv(ic) = i
    kare(i) = 1
    kno(n2) = 1
fim se
se ( kno(n1) = 0 e kno(n2) = 1 ) então
    ic = ic + 1
    karv(ic) = i
    kare(i) = 1
    kno(n1) = 1
fim se
fim para
vai a “início”

```

Para a iteração  $i$ , verifica-se inicialmente se a aresta  $i$  já pertence à árvore. Se sim, pula-se para a próxima aresta. Caso contrário, verifica-se se um (e somente um) dos nós da aresta  $i$  pertence à árvore. Caso positivo, a aresta  $i$  agora pertencerá à árvore, bem como o nó que ainda não pertencia. Observa-se que, caso determinada aresta não pertença à árvore, mas os dois nós que fazem parte dessa aresta pertençam, nada acontece e a aresta não é adicionada à árvore. Não é necessário repetir a operação muitas vezes para que a árvore esteja completa. De fato, para o exemplo apresentado no capítulo 4 desta dissertação, foram necessárias apenas 5 iterações, sendo que o problema possui 63053 nós e 361007 elementos. As arestas não pertencentes à árvore formam a chamada co-árvore.

Esse procedimento para a construção de árvores de arestas pode ser mais bem explicado ao se tomar um exemplo simples bidimensional. Na figura 2.4 é apresentado o mapeamento descrito anteriormente numa malha com 16 elementos triangulares, 14 nós e 29 arestas. As arestas em vermelho foram inseridas na árvore na primeira iteração, e as em azul, na segunda. As arestas em preto não foram inseridas e fazem parte da co-árvore.

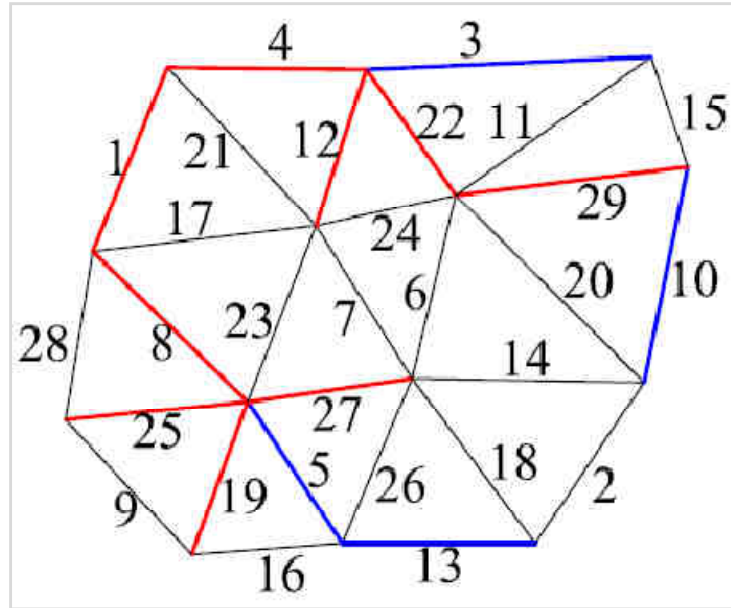


Figura 2.4: Árvore de arestas bidimensional

Dentro de condutores, utiliza-se a chamada árvore de faces, que serve para avaliar o fluxo  $\mathbf{J}$  através das faces de determinado elemento, e então calcular a circulação do campo magnético nas arestas. Utiliza-se a lei da continuidade elétrica, representada pela expressão  $\text{div } \mathbf{J} = 0$ , que na forma integral corresponde a

$$\oint_{S(V)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (2.31)$$

Essa expressão determina que a soma das correntes entrando e saindo de um determinado volume deve ser nula. Num tetraedro, que possui quatro faces, essa afirmação pode ser descrita como

$$\int_{S_1} \mathbf{J}_1 \cdot d\mathbf{s} + \int_{S_2} \mathbf{J}_2 \cdot d\mathbf{s} + \int_{S_3} \mathbf{J}_3 \cdot d\mathbf{s} + \int_{S_4} \mathbf{J}_4 \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (2.32)$$

Esse cálculo é efetuado através de uma árvore de faces. Neste método, os elementos são representados por pontos no seu baricentro, no caso da figura 2.5, *a*, *b* e *c*. São determinadas “pseudo-arestas” que unem esses baricentros (na figura 2.5, essas pseudo-arestas são representadas por  $e_1$  e  $e_2$ ). As faces em azul são comuns aos elementos 1 e 2, e 2 e 3, respectivamente.



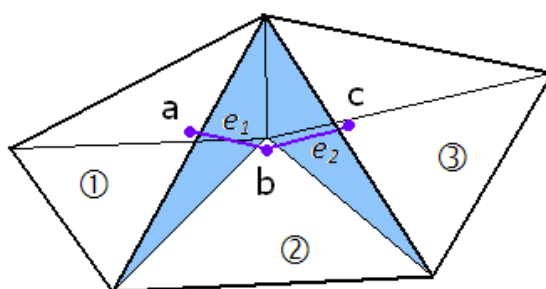


Figura 2.5: Pseudo-arestas ( $e_1$  e  $e_2$ ) em três elementos

A seguir será apresentado um exemplo um pouco mais completo para ilustrar a formação de árvores de faces. A figura 2.6 mostra uma malha com 10 elementos tetraédricos, representados na malha e individualmente. Cada elemento está conectado a três outros elementos através de três das suas faces, e com o meio externo, através da face restante.

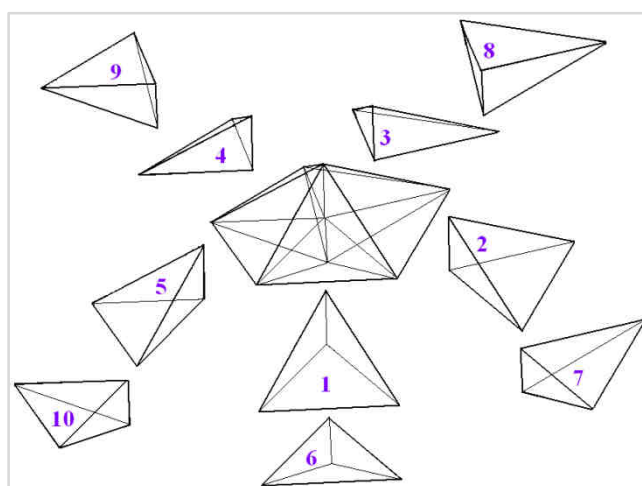


Figura 2.6: Malha com dez elementos tetraédricos

Na figura 2.7 a mesma malha é representada por seus elementos numerados e unidos pelas pseudo-arestas (representadas pelas faces que atravessam), incluindo o meio externo, neste caso chamado 11.

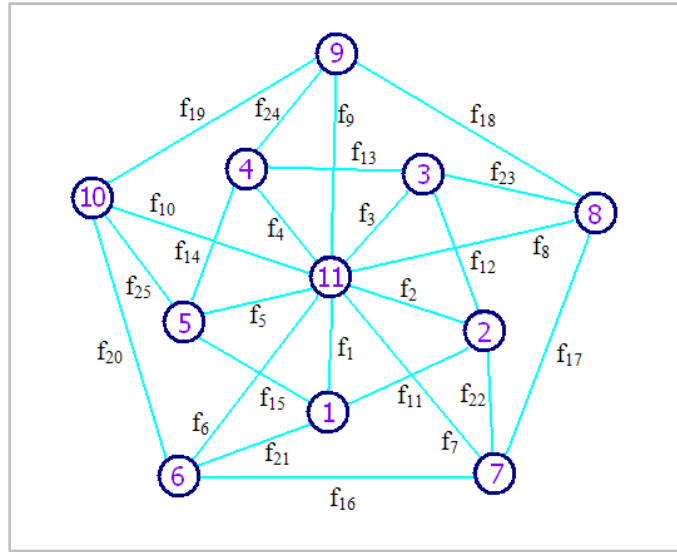


Figura 2.7: Elementos da malha unidos por pseudo-arestas

Para construir a árvore de faces, segue-se o mesmo princípio da árvore de arestas: o caminho deve ser aberto e deve conter todos os nós. Uma árvore possível para este exemplo é a apresentada na figura 2.8, em azul. As demais pseudo-arestas (em vermelho) formam a co-árvore.

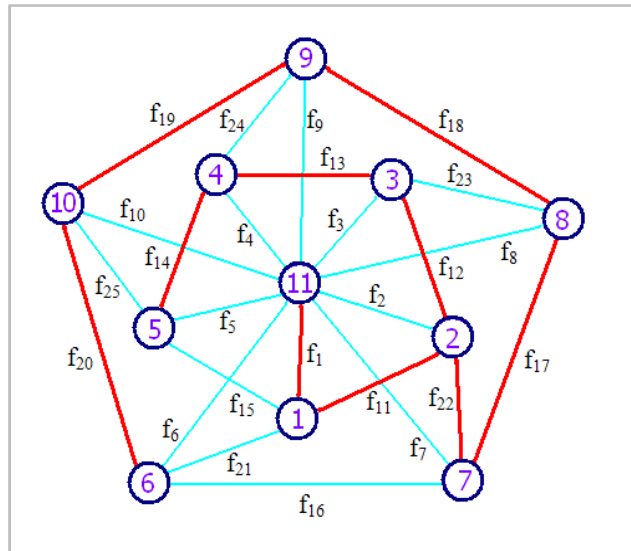


Figura 2.8: Árvore de faces para uma malha de dez tetraedros

Os fluxos de corrente nas faces dos tetraedros pertencentes à árvore podem ser fixados arbitrariamente (respeitando a relação em 2.32), para que se deduzam os fluxos nas faces restantes. Por exemplo, podem ser considerados nulos. Tendo sido determinadas as correntes em todas as faces do tetraedro, já se tem a parte à direita da igualdade em (2.30),

e se pode prosseguir com o cálculo da circulação do campo magnético nas arestas dos elementos. Para isso, os valores da circulação do campo são impostos na árvore de arestas e então deduzidos nas arestas restantes.

## 2.3 O uso do programa I-DEAS

O I-DEAS, programa adquirido pelo GRUCAD, é um *software* completo, que pode ser usado para executar desde a etapa do desenho da estrutura desejada até o pós-processamento. Porém, ele funciona apenas para cálculos mecânicos, necessitando então de uma adaptação para a parte eletromagnética.

Uma das vantagens do I-DEAS, muito importante para os cálculos eletromagnéticos, é sua poderosa ferramenta de CAD (*Computer-Aided Design* – Desenho auxiliado por computador). Esta foi desenvolvida com o intuito de se projetar estruturas em três dimensões, o que simplifica bastante esta tarefa. Além disso, o desenho já é compatível com o malhador, fazendo com que não sejam necessárias adaptações para se malhar a estrutura.

Outro recurso explorado para fins eletromagnéticos é a ferramenta que estabelece malhas de elementos finitos. Estruturas complexas e com grande número de elementos normalmente não são simples de malhar. O software oferece algumas opções quanto ao tipo de elemento (primeira ou segunda ordem, em uma, duas ou três dimensões), refinamento da malha em locais determinados pelo usuário, diferentes materiais, dimensões dos elementos, entre outras. Assim é possível numerar os materiais utilizados no I-DEAS e exportar esses dados, junto com os demais dados de geometria, para o programa de cálculo (FEECAD), definindo suas características conforme sua numeração.

Pode-se também trabalhar com malhas de diferentes dimensões; por exemplo, ao se analisar uma máquina elétrica, escolhe-se um tamanho menor para os elementos de áreas críticas, como o entreferro, e a transição entre as dimensões desses elementos e as de outros maiores é efetuada automaticamente. As condições de contorno também devem ser inseridas pelo usuário através do programa I-DEAS.

Concluídos o desenho, a malha de elementos finitos e a inserção das condições de contorno, deve ser exportado um arquivo que contenha esses dados. Esse é chamado de arquivo universal (*universal file*), possui a extensão “unv” e será lido e modificado pelo processador do FEECAD. Essa alteração consiste na inserção dos resultados obtidos, que

são basicamente as componentes (reais e imaginárias, se for o caso) em relação aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  da indução magnética.

O *software* I-DEAS lê, então, o arquivo universal com os resultados e pode apresentá-los, de forma gráfica, na tela. Se o usuário desejar conhecer alguma informação específica, como o valor da indução magnética num ponto, ou ao longo de uma linha, ou ainda o valor da força ou do fluxo magnético sobre determinada superfície, deve utilizar o pós-processador criado neste projeto, e cujo nome é FEEGID.

Conhecendo-se então o método do campo fonte e de construção de árvores de arestas e de faces, bem como a forma de interação entre os programas I-DEAS e FEECAD, pode-se passar à próxima etapa, que consiste na elaboração do pós-processador. No capítulo 3 serão apresentados os tipos de superfícies contemplados, bem como a forma de se calcular o fluxo e a força magnética.

## 3. Elaboração do pós-processador

---

Para utilizar o pós-processador, deve-se inicialmente abrir o programa (FEEGID) e inserir o nome do arquivo universal a ser lido. Uma tela será aberta, oferecendo diversas opções de apresentação gráfica e numérica dos resultados, bastando clicar sobre o ícone correspondente à opção desejada. Caso seja escolhido o cálculo de força ou fluxo magnético, devem ser inseridos em seguida os dados da superfície sobre a qual a grandeza será calculada.

Neste capítulo serão apresentados os dois conceitos principais para o desenvolvimento do pós-processador FEEGID: os tipos de superfícies que o programa suporta e os métodos utilizados para o cálculo de forças e fluxos.

### 3.1 Tipos de superfícies

O pós-processador para estruturas desenhadas e malhadas através do I-DEAS e com cálculos efetuados pelo FEECAD foi desenvolvido em linguagem FORTRAN, assim como os demais módulos do FEECAD. São oferecidos cálculos sobre diferentes tipos de superfícies.

#### 3.1.1 Superfícies planas retangulares

O tipo mais simples são superfícies planas retangulares, cujo vetor que as representa é paralelo a um dos eixos de coordenadas cartesianas ( $x$ ,  $y$  ou  $z$ ). Devem-se inserir apenas os valores máximos e mínimos de coordenadas em relação a dois dos eixos, e o valor fixo das coordenadas referentes ao eixo cartesiano ao qual superfície é paralela.

Por exemplo, para a superfície mostrada na figura 3.1, deve-se inicialmente indicar que o vetor correspondente está paralelo ao eixo  $x$ . Em seguida, deve-se inserir o valor (neste caso, de  $x$ ) constante, 30. Por último, devem ser indicados os valores mínimos e máximos de  $y$  e  $z$  (5, 25 e 10, 40, respectivamente). A unidade (milímetros) já está subentendida.

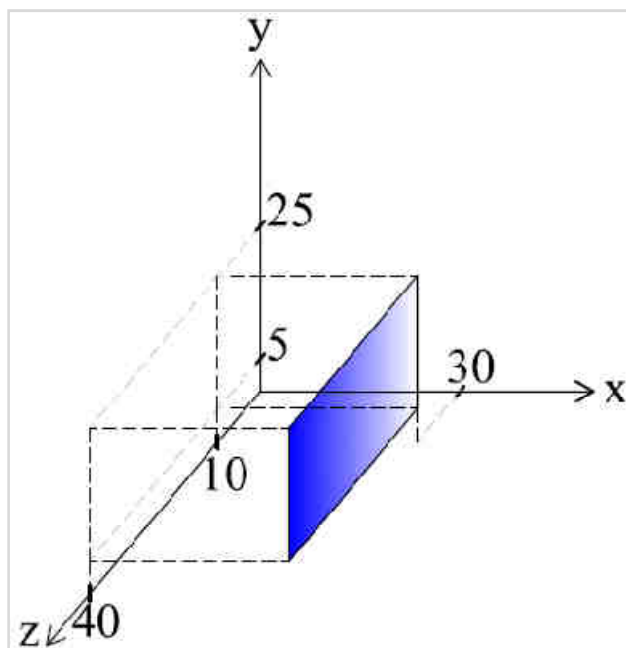


Figura 3.1: Superfície plana, paralela ao eixo x

### 3.1.2 Quadriláteros planos

A inserção dos dados de qualquer superfície quadrilateral plana, inclinada ou não, é feita ao se fornecer ao FEEGID as coordenadas em x, y e z dos pontos que definem o vetor correspondente, no sentido anti-horário segundo a regra da mão direita.

Pode-se apresentar como exemplo uma das superfícies usadas no capítulo 4 desta dissertação, para se medir o fluxo magnético que atravessa um dente da máquina. No caso do dente número 2 (segundo a numeração utilizada no capítulo 4), as coordenadas correspondentes (ver figura 3.2), em milímetros, são:

	X	Y	Z
Ponto 1	10,7	18,5	-45
Ponto 2	6,5	55	-45
Ponto 3	27,5	47,6	-45
Ponto 4	44,1	33	-45

Tabela 3.1: Coordenadas de uma superfície quadrilateral plana

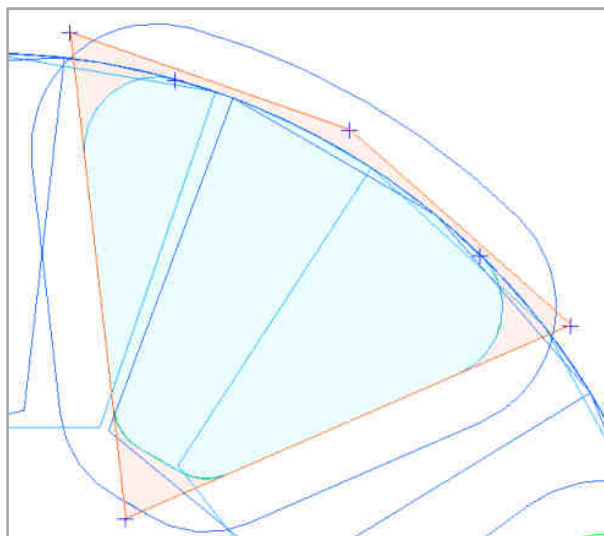


Figura 3.2: Superfície quadrilateral plana irregular

### 3.1.3 Superfícies curvas

Para superfícies curvas, inicialmente deve-se informar o eixo (x, y ou z) paralelo ao qual é o eixo do centro da curva. Devem-se fornecer as coordenadas do centro da curva, bem como das suas alturas máxima e mínima, e dos seus pontos inicial e final (ou ângulo de abertura). Admite-se uma diferença de até 5% entre o raio do ponto inicial e o raio do ponto final. Para os cálculos foram elaboradas as figuras , presente nos anexos desta dissertação.

Como exemplo, foi escolhida uma superfície interna a um dos dentes da máquina apresentada no capítulo 4 desta dissertação. Essa superfície pode ser visualizada, sombreada em azul claro, na figura 3.3. A seguir estão indicados os dados que devem ser informados, bem como as respostas fornecidas neste exemplo:

Paralelo a qual eixo é o centro da curva: eixo z

Coordenadas (x, y) do centro da curva: (0, 0)

Raio (em mm): 40

$Z_{\text{mínimo}}$  ;  $Z_{\text{máximo}}$  (mm): -55,8 ; -35,5

Número de divisões em z: 20

Ponto inicial, em sentido anti-horário (x ; y): (29,75 ; 26,76)

Ponto final ou ângulo de abertura da curva: ponto final

Coordenadas (x ; y) do ponto final: (8,3 ; 39,1)

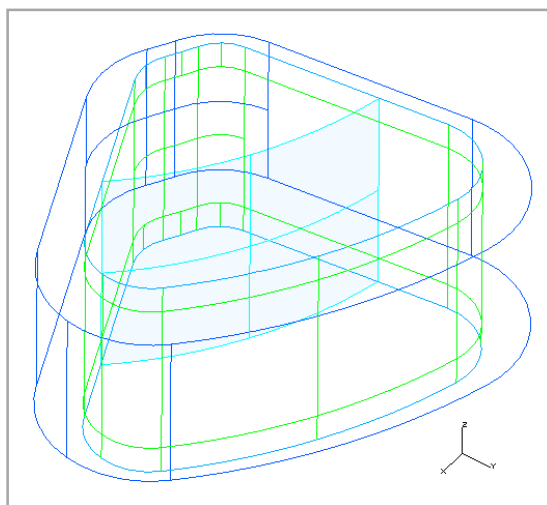


Figura 3.3: Superfície interna a um dos dentes de um motor de fluxo axial

Este tipo de superfície pode ser útil no projeto de máquinas elétricas, ao se verificar grandezas como a força magnética a qual determinadas peças poderão estar submetidas.

A seguir será apresentada a forma de cálculo do ângulo de abertura ( $\gamma$ ) numa superfície curva. Ele pode ser calculado ao se subtrair o ângulo do ponto inicial da curva ( $\alpha$ ) do ângulo do ponto final ( $\beta$ ). Porém, quando lê os ângulos, o programa os posiciona automaticamente no primeiro ou no quarto quadrante, por isso se torna necessária uma correção desses valores.

Na tabela a seguir se escolheu como padrão mostrar os valores reais dos ângulos em azul ( $\beta$ ) ou vermelho ( $\alpha$ ), e na forma como o programa os lê, em preto. Na primeira página são fornecidos os dados para quando  $\alpha$  está no primeiro ou no segundo quadrante, e na página seguinte, para quando  $\alpha$  está no terceiro ou no quarto quadrante.

Para cada combinação de ângulos é fornecido um pequeno ábaco com o quadrante sobre o qual  $\beta$  está (QDB) e se os valores de x e y do ponto final (correspondente ao ângulo  $\beta$ ) são positivos ou negativos. Considera-se, para isso, x o eixo horizontal e y, o eixo vertical. As fórmulas utilizadas para calcular  $\gamma$  estão destacadas dentro de retângulos.



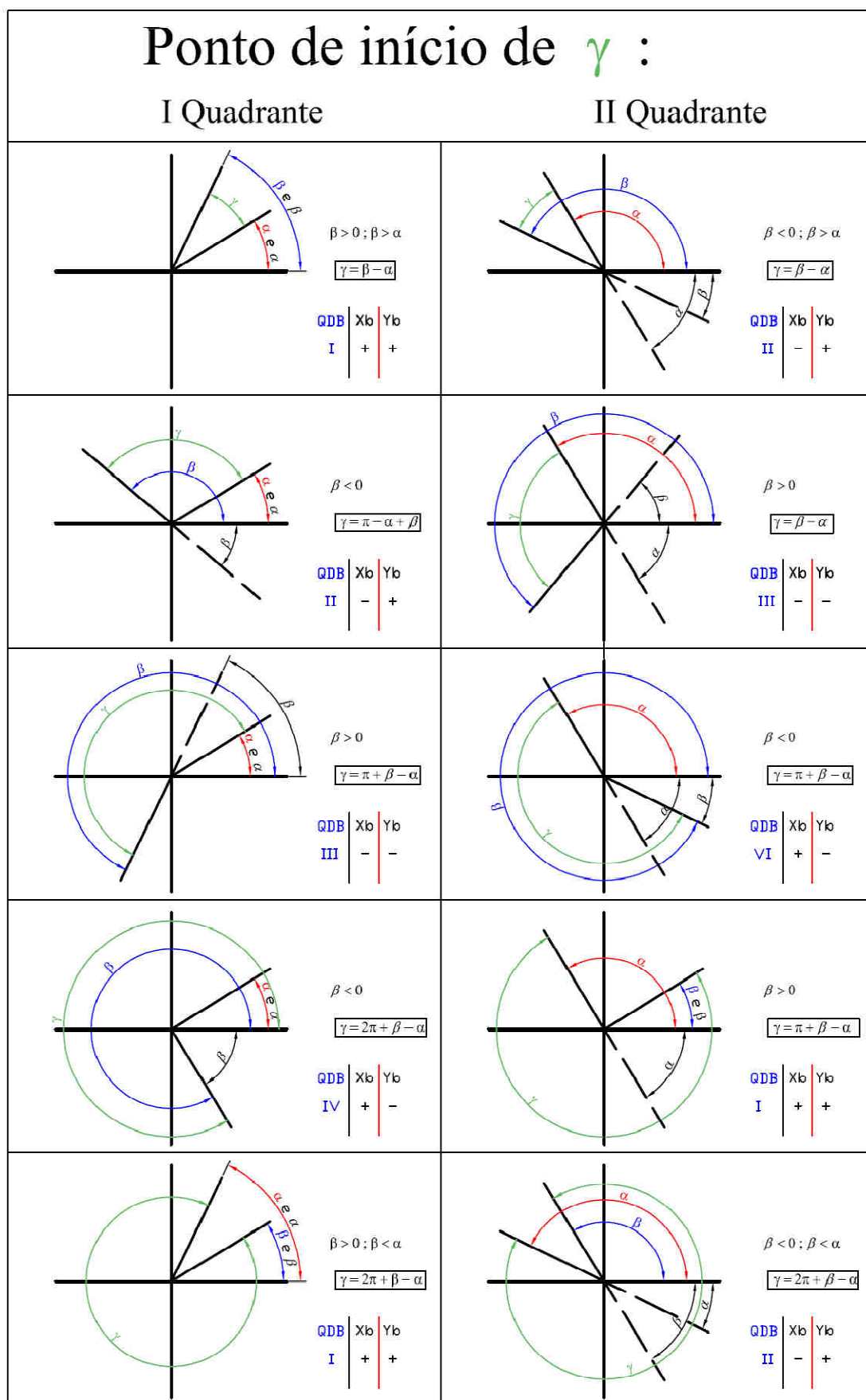


Figura 3.4: Cálculo de gama, com o ponto inicial no primeiro ou segundo quadrante

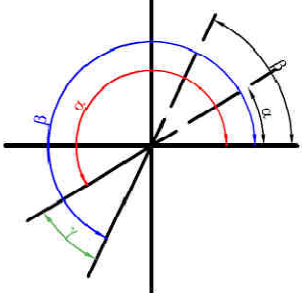
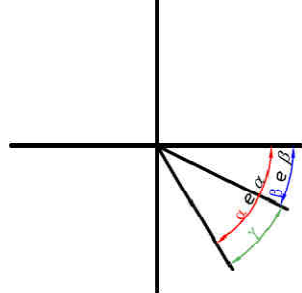
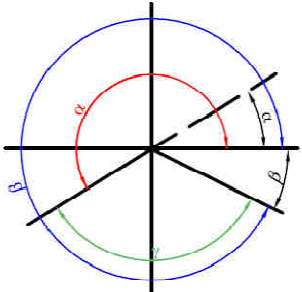
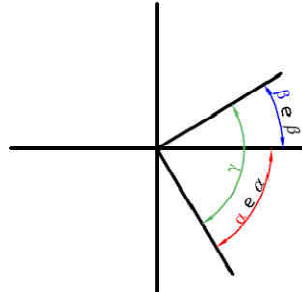
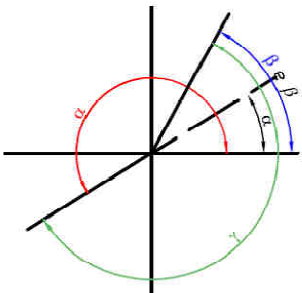
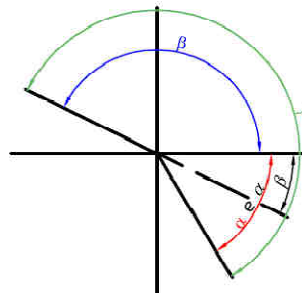
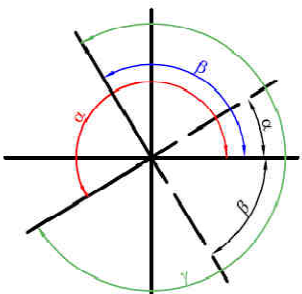
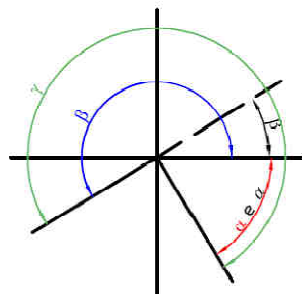
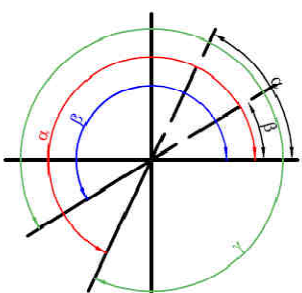
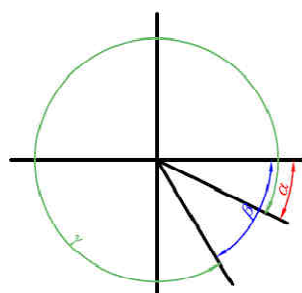
Ponto de início de $\gamma$ :													
III Quadrante	IV Quadrante												
 <p><math>\beta &gt; 0 ; \beta &gt; \alpha</math> <math>\gamma = \beta - \alpha</math></p> <table><tr><td>QDB</td><td><math>X_b</math></td><td><math>Y_b</math></td></tr><tr><td>III</td><td>-</td><td>-</td></tr></table>	QDB	$X_b$	$Y_b$	III	-	-	 <p><math>\beta &lt; 0 ; \beta &gt; \alpha</math> <math>\gamma = \beta - \alpha</math></p> <table><tr><td>QDB</td><td><math>X_b</math></td><td><math>Y_b</math></td></tr><tr><td>IV</td><td>+</td><td>-</td></tr></table>	QDB	$X_b$	$Y_b$	IV	+	-
QDB	$X_b$	$Y_b$											
III	-	-											
QDB	$X_b$	$Y_b$											
IV	+	-											
 <p><math>\beta &lt; 0</math> <math>\gamma = \pi - \alpha + \beta</math></p> <table><tr><td>QDB</td><td><math>X_b</math></td><td><math>Y_b</math></td></tr><tr><td>VI</td><td>+</td><td>-</td></tr></table>	QDB	$X_b$	$Y_b$	VI	+	-	 <p><math>\beta &gt; 0</math> <math>\gamma = \beta - \alpha</math></p> <table><tr><td>QDB</td><td><math>X_b</math></td><td><math>Y_b</math></td></tr><tr><td>I</td><td>+</td><td>+</td></tr></table>	QDB	$X_b$	$Y_b$	I	+	+
QDB	$X_b$	$Y_b$											
VI	+	-											
QDB	$X_b$	$Y_b$											
I	+	+											
 <p><math>\beta &gt; 0</math> <math>\gamma = \pi + \beta - \alpha</math></p> <table><tr><td>QDB</td><td><math>X_b</math></td><td><math>Y_b</math></td></tr><tr><td>I</td><td>+</td><td>+</td></tr></table>	QDB	$X_b$	$Y_b$	I	+	+	 <p><math>\beta &lt; 0</math> <math>\gamma = \pi + \beta - \alpha</math></p> <table><tr><td>QDB</td><td><math>X_b</math></td><td><math>Y_b</math></td></tr><tr><td>II</td><td>-</td><td>+</td></tr></table>	QDB	$X_b$	$Y_b$	II	-	+
QDB	$X_b$	$Y_b$											
I	+	+											
QDB	$X_b$	$Y_b$											
II	-	+											
 <p><math>\beta &lt; 0</math> <math>\gamma = 2\pi + \beta - \alpha</math></p> <table><tr><td>QDB</td><td><math>X_b</math></td><td><math>Y_b</math></td></tr><tr><td>II</td><td>-</td><td>+</td></tr></table>	QDB	$X_b$	$Y_b$	II	-	+	 <p><math>\beta &gt; 0</math> <math>\gamma = \pi + \beta - \alpha</math></p> <table><tr><td>QDB</td><td><math>X_b</math></td><td><math>Y_b</math></td></tr><tr><td>III</td><td>-</td><td>-</td></tr></table>	QDB	$X_b$	$Y_b$	III	-	-
QDB	$X_b$	$Y_b$											
II	-	+											
QDB	$X_b$	$Y_b$											
III	-	-											
 <p><math>\beta &gt; 0 ; \beta &lt; \alpha</math> <math>\gamma = 2\pi + \beta - \alpha</math></p> <table><tr><td>QDB</td><td><math>X_b</math></td><td><math>Y_b</math></td></tr><tr><td>III</td><td>-</td><td>-</td></tr></table>	QDB	$X_b$	$Y_b$	III	-	-	 <p><math>\beta &lt; 0 ; \beta &lt; \alpha</math> <math>\gamma = 2\pi + \beta - \alpha</math></p> <table><tr><td>QDB</td><td><math>X_b</math></td><td><math>Y_b</math></td></tr><tr><td>VI</td><td>+</td><td>-</td></tr></table>	QDB	$X_b$	$Y_b$	VI	+	-
QDB	$X_b$	$Y_b$											
III	-	-											
QDB	$X_b$	$Y_b$											
VI	+	-											

Figura 3.5: Cálculo de gama, com o ponto inicial no terceiro ou quarto quadrante

### 3.2 Cálculo de forças e fluxos

Para o cálculo de forças foi utilizado o conceito de tensor de Maxwell. Segundo este método, é necessário conhecer o vetor que representa a superfície sobre a qual se deseja calcular a força e dividi-lo em seus três componentes, paralelos aos eixos x, y e z. Também deve se conhecer o valor da indução ou do campo magnético nos elementos que compõem essa superfície. A equação (3.1) [2] foi utilizada para se deduzir as expressões que representam o tensor de Maxwell em três dimensões.

$$d\mathbf{F} = -\frac{1}{2} \mu_0 H^2 d\mathbf{s} + \mu_0 (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}) \mathbf{H} \quad (3.1)$$

Os vetores que representam a força, a área e o campo magnético são representados por suas componentes tridimensionais, assim:

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{H} = H_x \mathbf{i} + H_y \mathbf{j} + H_z \mathbf{k} \quad (3.3)$$

$$d\mathbf{s} = ds_x \mathbf{i} + ds_y \mathbf{j} + ds_z \mathbf{k} \quad (3.4)$$

Aplicando as expressões acima na equação (3.1) obtém-se as expressões do tensor de Maxwell para três dimensões, a saber:

$$dF_x \mathbf{i} = \mu_0 \left[ (H_x^2 - H_y^2 - H_z^2) \frac{ds_x}{2} + H_x (H_y ds_y + H_z ds_z) \right] \mathbf{i} \quad (3.5)$$

$$dF_y \mathbf{j} = \mu_0 \left[ (H_y^2 - H_z^2 - H_x^2) \frac{ds_y}{2} + H_y (H_z ds_z + H_x ds_x) \right] \mathbf{j} \quad (3.6)$$

$$dF_z \mathbf{k} = \mu_0 \left[ (H_z^2 - H_x^2 - H_y^2) \frac{ds_z}{2} + H_z (H_x ds_x + H_y ds_y) \right] \mathbf{k} \quad (3.7)$$

Os fluxos são dados pela expressão  $\phi = \int_{s(v)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ , o que fornece as seguintes expressões:

$$\phi_x = B_x S_x \quad (3.8)$$

$$\phi_y = B_y S_y \quad (3.9)$$

$$\phi_z = B_z S_z \quad (3.10)$$

Quando há componentes imaginárias, utilizam-se as mesmas expressões para se calcular o fluxo magnético, porém no lugar da componente real, é utilizada a componente imaginária da indução.

## 4. Aplicação prática

A fim de comprovar o funcionamento do método e validar o projeto realizado, foram feitas algumas simulações. Inicialmente serão apresentadas estruturas mais simples: um circuito magnético com bobina e um com ímã permanente. Em seguida, um motor de fluxo axial, que requer uma análise tridimensional. Em todos os cálculos efetuados neste capítulo considerou-se o ferro como sendo linear, ou seja, desprezou-se o efeito da saturação no ferro.

### 4.1 Circuito magnético com bobina

O primeiro caso a ser apresentado é um circuito magnético composto por duas partes de material ferromagnético, uma fixa e uma móvel, além de uma bobina (na parte fixa) e entreferros de 1 mm, que separam as duas peças, conforme a figura 4.1. No desenho completo as peças na figura 4.2 estão refletidas para baixo (no plano xz). A profundidade das peças de ferro vale respectivamente 20 e 15 mm, e a bobina é alimentada com uma densidade de corrente de  $1 \text{ A/mm}^2$ .

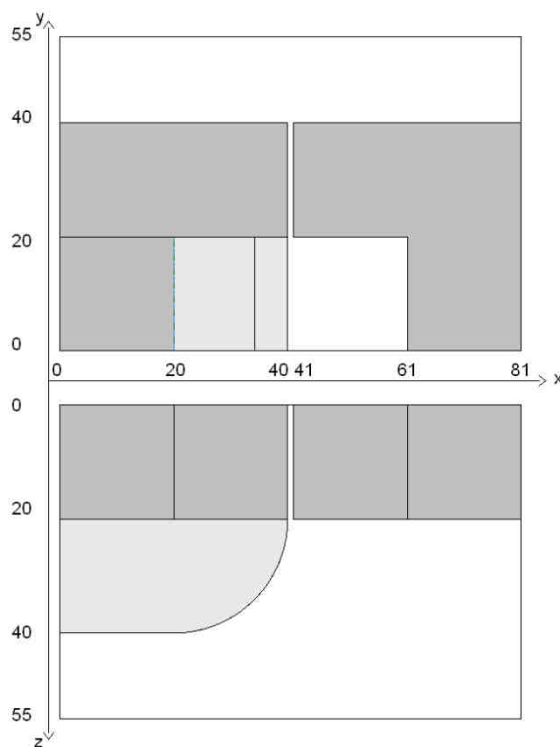


Figura 4.1: Dimensões do circuito magnético com bobina

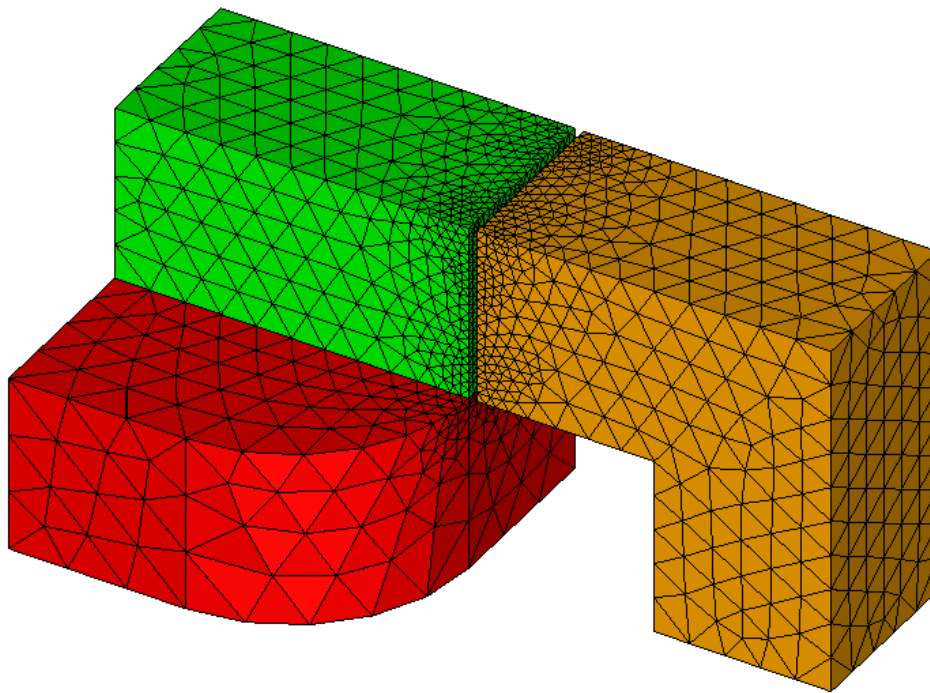


Figura 4.2: Malha do circuito magnético com bobina

Esta estrutura permite uma solução analítica aproximada. O valor da permeabilidade magnética do ferro será considerado muito superior ao da permeabilidade do ar. Assim, a lei de Ampère, que fornece o valor do campo magnético, é dada por:

$$\oint_{L(S)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.1)$$

$$2 H_e l_e = J S_{\text{bob}} \quad (4.2)$$

$$2(10^{-3}) H_e = 800$$

$$H_e = 4(10^5) \text{ A/m} \quad (4.3)$$

Segundo a expressão (2.5) a indução magnética no entreferro vale:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{B} = 0,5027 \text{ T} \quad (4.5)$$

Também podem ser calculados o fluxo e a força [2] em um dos entreferros do circuito:

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.9)$$

$$\phi = 0,201 \text{ mWb} \quad (4.10)$$

$$F = \frac{\mu_0 H^2 s}{2} \quad (4.11)$$

$$F = 40,21 \text{ N} \quad (4.12)$$

A estrutura foi simulada com o sistema FEECAD aliado ao programa I-DEAS. A malha correspondente de elementos finitos, que pode ser vista na figura 4.2, possui 40165 elementos, 7895 nós, 50314 arestas e 82585 faces. O pós-processador forneceu, em um dos entreferros, os valores de respectivamente 0,178 mWb e 31,41 N. Quanto à indução magnética, traçando uma linha ao longo do entreferro, com  $x = 40,5 \text{ mm}$ ,  $z = 10 \text{ mm}$  e  $y$  variando de 20 mm a 40 mm, obteve-se o gráfico mostrado na figura 4.3. O valor da indução na maior parte da linha é 0,445 T. Os vetores que representam a indução magnética no ferro do circuito podem ser visualizados na figura 4.4. Cabe salientar que a figura representa o resultado do cálculo 3D, e mostra a vista do plano xy da estrutura. Percebe-se que os valores são próximos aos calculados, porém um pouco inferiores, já que no cálculo analítico não se levou em conta a dispersão do campo.

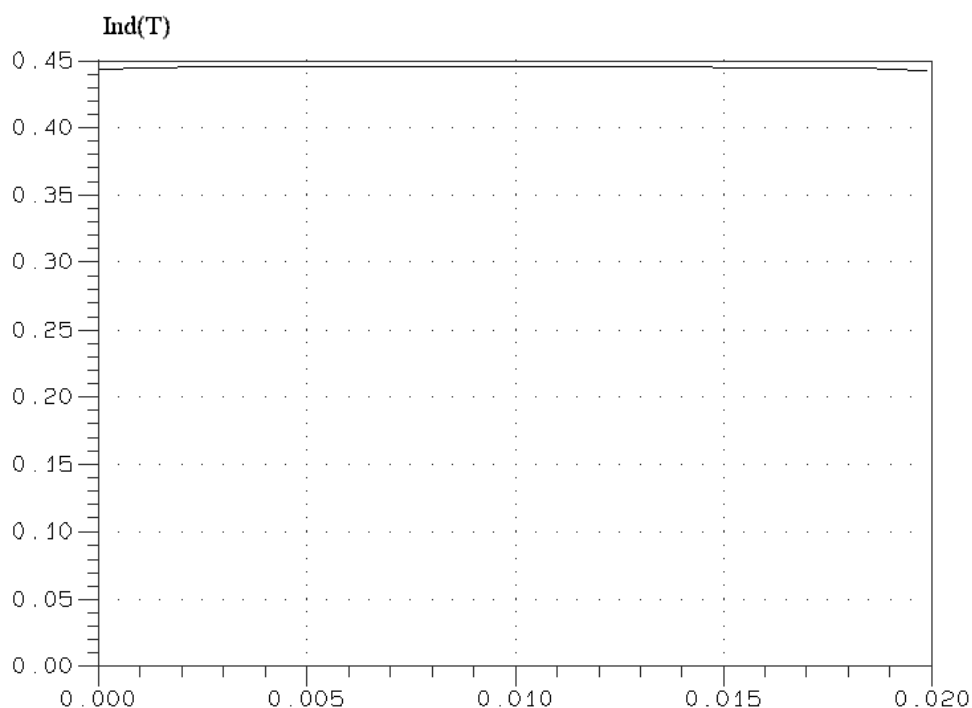


Figura 4.3: Indução no entreferro do circuito com bobina

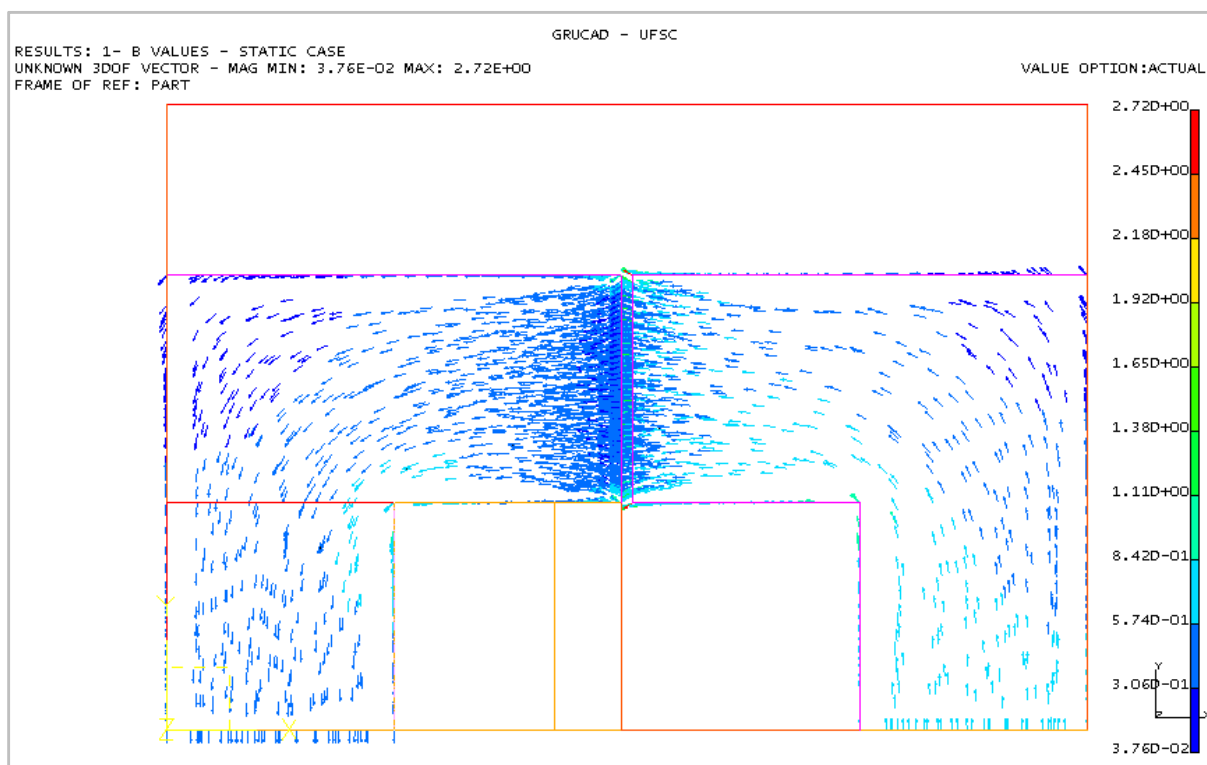


Figura 4.4: Indução nas partes de ferro do circuito

A tabela 4.1 sintetiza as informações obtidas através dos cálculos analítico e numérico.

	Cálculo analítico	FEECAD	Erro (%)
Indução [T]	0,5027	0,445	11,47
Força [N]	40,21	31,41	21,89
Fluxo [mWb]	0,201	0,178	11,47

Tabela 4.1: Comparação dos resultados obtidos para o circuito com bobina

## 4.2 Circuito magnético com ímã permanente

O circuito com ímã permanente que foi analisado pode ser visto na figura 4.5. Supõe-se ímã com indução remanente de 1 T, comprimento de 10 mm e entreferro de 1 mm. As dimensões da estrutura podem ser visualizadas na figura 4.6. A profundidade de todas as peças é 20 mm e a área através da qual passa fluxo magnético é a mesma em todo o circuito. O caminho médio no ferro será considerado como 240 mm, e a permeabilidade



relativa do ferro como 1000. Assim, a circulação do campo magnético, a conservação do fluxo e a equação do ímã são representadas respectivamente pelas expressões (4.13), (4.15), (4.17) e (4.19).

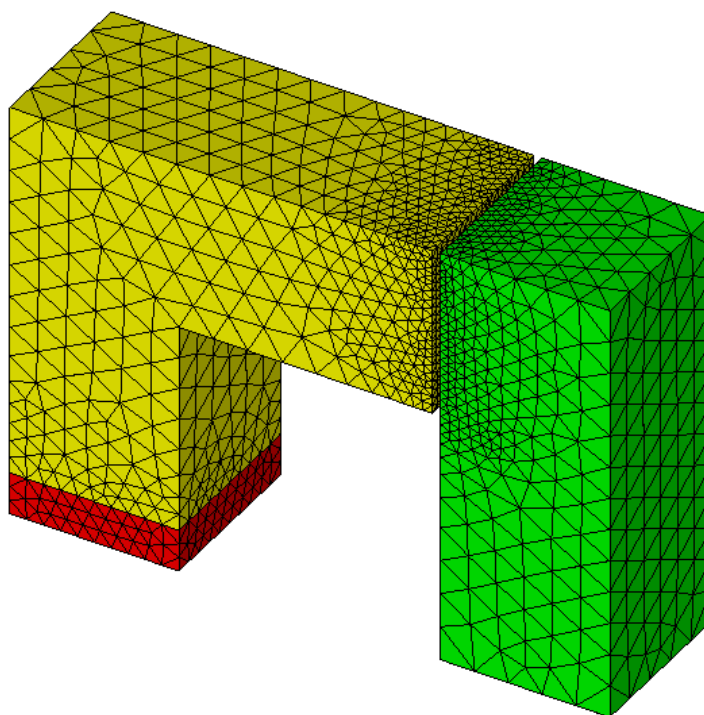


Figura 4.5: Malha de elementos finitos da estrutura com ímã permanente

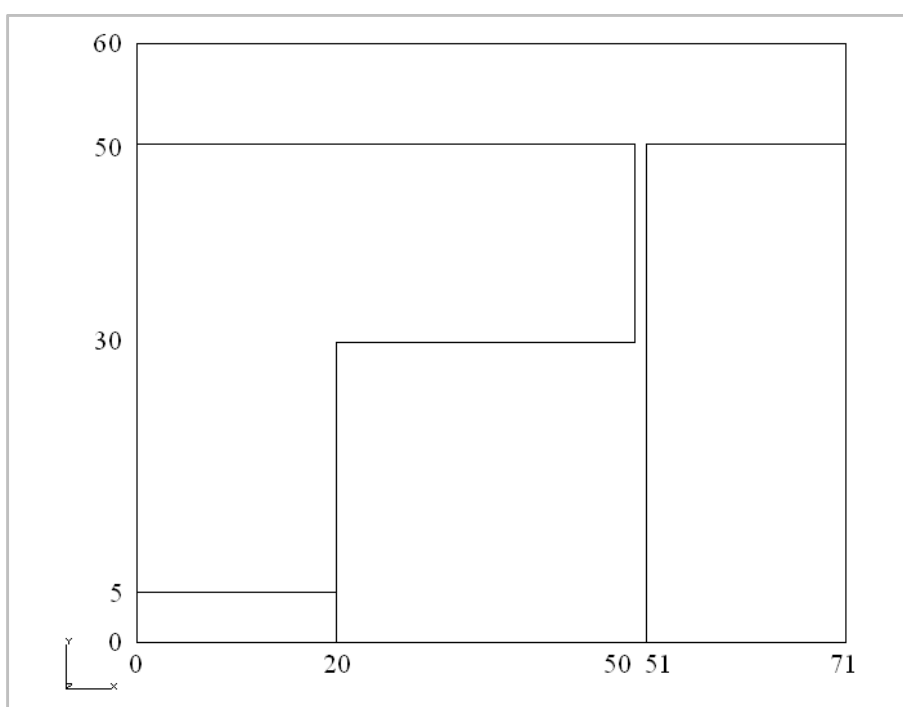


Figura 4.6: Dimensões em milímetros do circuito magnético com ímã permanente

$$H_e l_e + H_e l_e + H_i l_i + H_f l_f = 0 \quad (4.13)$$

$$2 \left( 10^{-3} \right) H_e + 10 \left( 10^{-3} \right) H_i + 250 \left( 10^{-3} \right) H_f = 0$$

$$2 H_e + 10 H_i + 250 H_f = 0 \quad (4.14)$$

$$\Phi_i = \Phi_e \quad (4.15)$$

$$B_i S_i = B_e S_e$$

$$B_i = \mu_o H_e \quad (4.16)$$

$$\Phi_e = \Phi_f \quad (4.17)$$

$$H_e = 1000 H_f \quad (4.18)$$

$$B_i = \mu_o H_i + 1,0 \quad (4.19)$$

$$H_i = \frac{(B_i - 1,0)}{\mu_o} \quad (4.20)$$

Assim, tem-se que a expressão (4.14) pode ser escrita como

$$H_e + 5 \left( H_e - \frac{1}{\mu_o} \right) + \frac{125}{1000} H_e = 0$$

$$H_e = 649612,0 \text{ A/m} \quad (4.21)$$

$$B_e = 0,816 \text{ T} \quad (4.22)$$

Este circuito magnético foi simulado com o sistema FEECAD e o *software* IDEAS. Foi utilizada uma malha com 26177 elementos, 5285 nós, 33162 arestas e 54055 faces. No pós-processador pode-se verificar o valor da indução ao longo de uma linha, e traçando-se essa linha no meio do entreferro, paralela ao eixo y, obtém-se um valor em torno de 0,65 T. O gráfico correspondente pode ser visto na figura 4.7. O cálculo em duas dimensões, utilizando o sistema EFCAD, fornece 0,69 T.

Quanto aos cálculos de fluxo magnético e força, tem-se que:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\Phi = 0,327 \text{ mWb} \quad (4.23)$$

$$F = \frac{\mu_o H^2 s}{2}$$

$$F = 106,06 \text{ N} \quad (4.24)$$

O pós-processador FEEGID forneceu respectivamente os valores de 0,258 mWb e 66,4 N. Novamente os valores são inferiores aos calculados previamente, mas isso pode ser justificado porque não foi levada em conta a dispersão do campo magnético. Os valores fornecidos pelo FEECAD são mais próximos aos encontrados pelo cálculo analítico, respectivamente 0,273 mWb e 74,5 N. A tabela 4.2 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos pelo FEECAD, EFCAD e pelo cálculo analítico. A figura 4.8 mostra a indução magnética na parte ferromagnética do circuito, na vista do plano xy. Na figura 4.9 pode-se observar o espreadimento do campo magnético na “caixa de ar” que envolve o circuito. Cabe salientar que ambas as figuras apresentam resultados de uma simulação feita em 3D, com uma caixa de ar apenas entre as partes ferromagnéticas do circuito e até 10 milímetros acima, conforme mostra a figura 4.10.

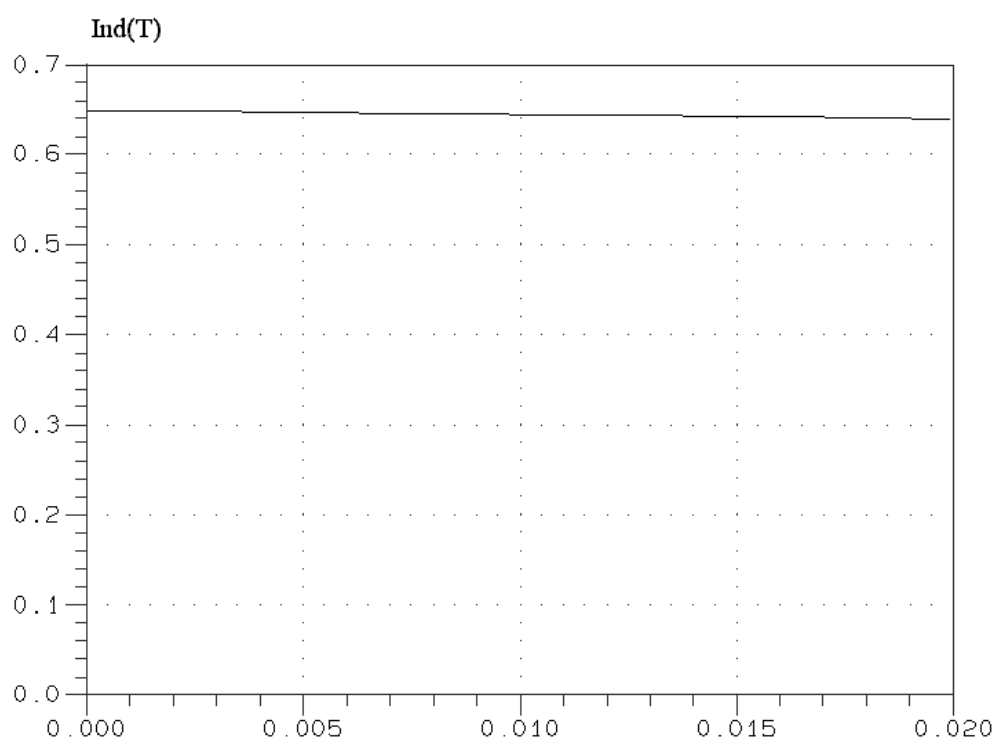


Figura 4.7: Indução magnética no entreferro do circuito com ímã permanente

	Cálculo analítico	FEECAD	Erro (%)	EFCAD	Erro (%)
Indução [T]	0,816	0,65	20,37	0,69	15,47
Força [N]	106,06	66,4	37,39	74,5	29,76
Fluxo [mWb]	0,327	0,258	20,99	0,273	16,39

Tabela 4.2: Comparação dos resultados obtidos para o circuito com ímã permanente

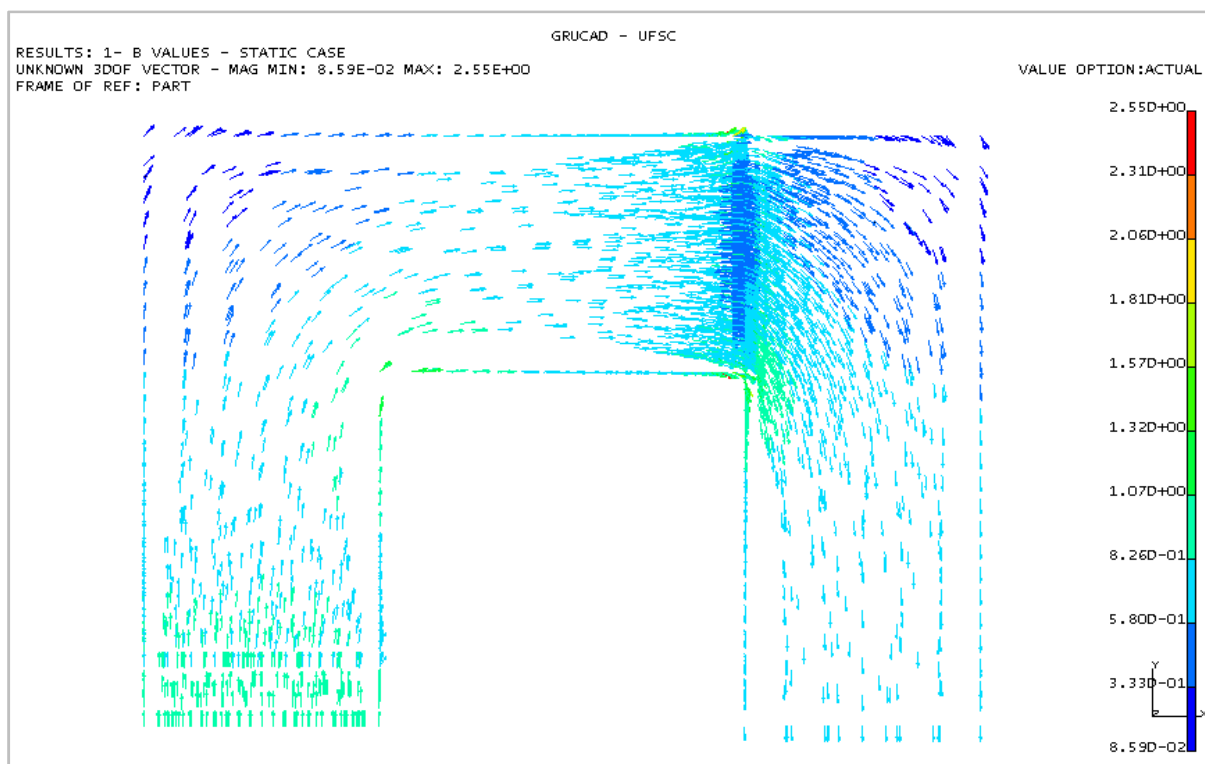


Figura 4.8: Indução magnética no ferro, em circuito magnético com ímã permanente

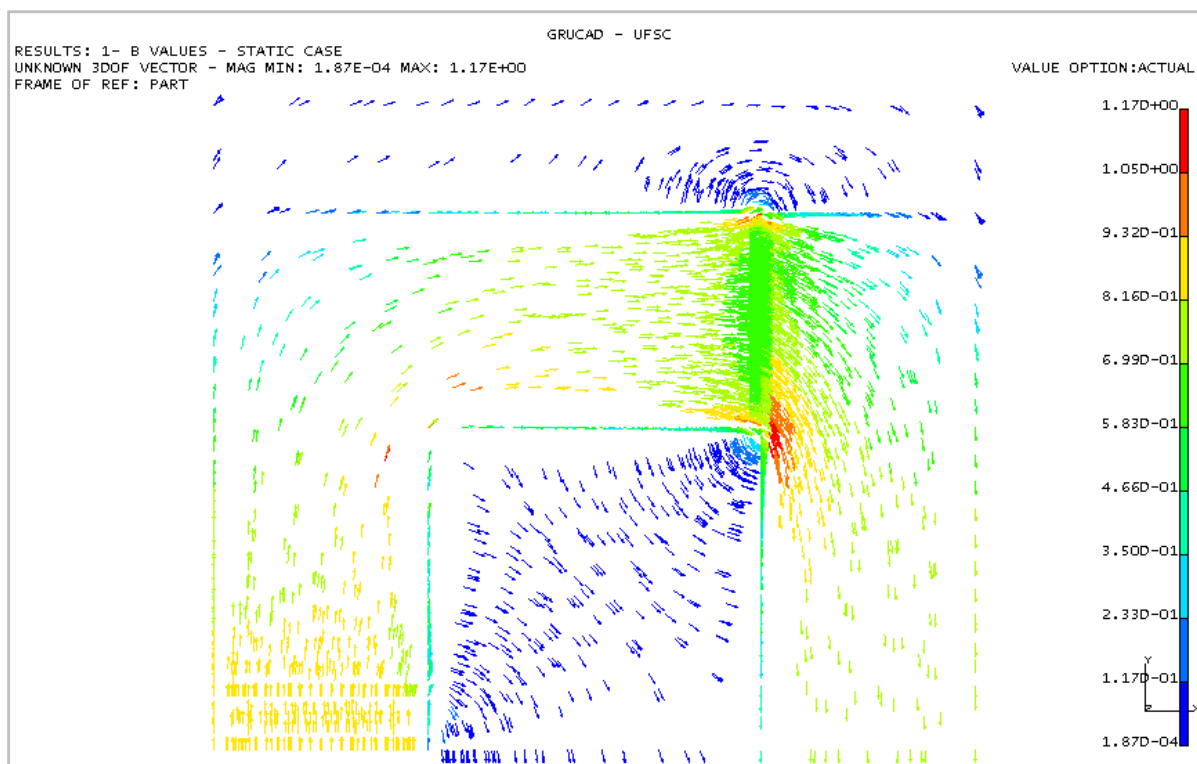


Figura 4.9: Indução magnética em circuito com ímã, incluindo os vetores na caixa de ar

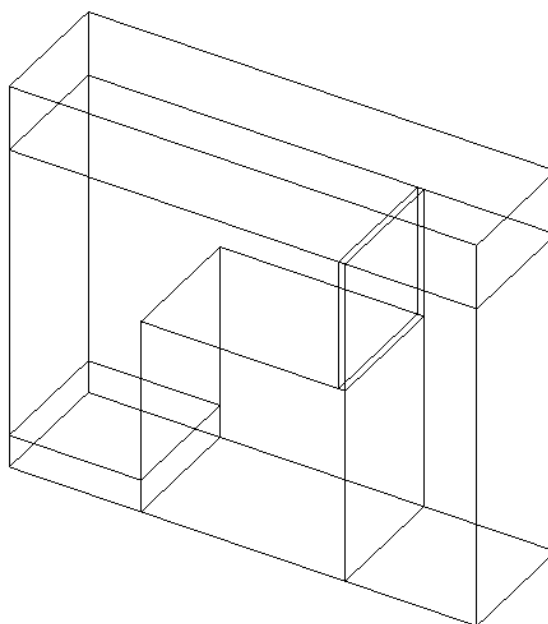


Figura 4.10: Posição dos componentes do circuito magnético, incluindo a camada de ar

### 4.3 Motor de fluxo axial

Este tipo de máquina pode ser usado em veículos elétricos, elevadores, bombas, centrífugas, ventiladores, robôs e equipamentos industriais, entre outros. Normalmente é composta por um ou dois estatores e um ou dois rotores. No caso aqui estudado, a máquina fornecida pela Empresa Brasileira de Compressores (EMBRACO) possui um estator e dois rotores. Estes são formados por um disco de material ferromagnético, sobre o qual estão alojados ímãs permanentes. Os estatores possuem, como componentes mais importantes do ponto de vista eletromagnético, bobinas que envolvem núcleos constituídos de material ferromagnético (conhecidos como “dentes” ou “sapatas”). Uma foto do dispositivo no qual foi baseada esta análise é mostrada na figura 4.11.

O estator da máquina analisada possui seis bobinas ligadas em série, duas a duas, em ligação trifásica em “Y”, como pode ser visto na figura 4.12(a). A numeração que se vê é a que foi convencionada para os dentes e bobinas nos cálculos aqui apresentados. Cada um dos dois rotores possui quatro conjuntos de dois ímãs permanentes, conforme as figuras 4.12 (b) e 4.13.

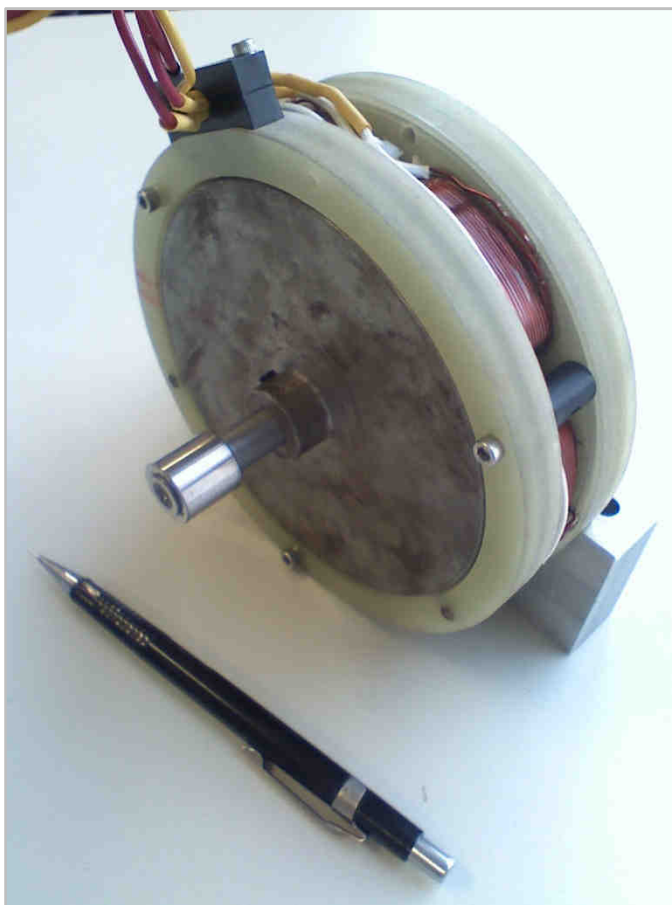
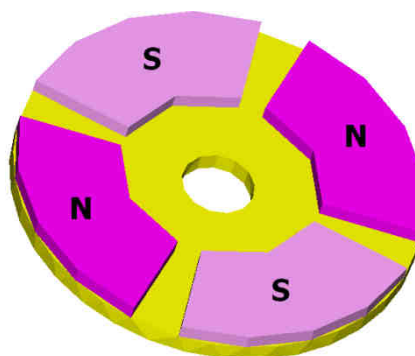


Figura 4.11: Foto da máquina de fluxo axial



(a) Estator



(b) Rotor

Figura 4.12: Esquemas do estator e do rotor da máquina estudada

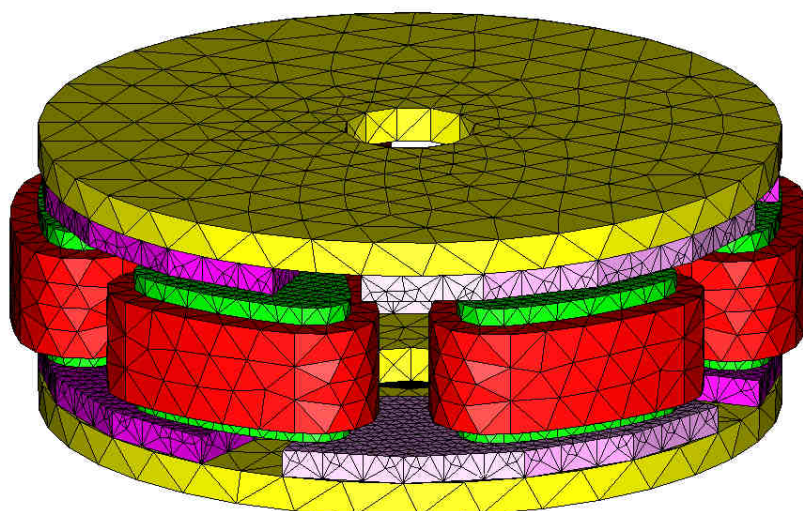


Figura 4.13: Malha e posição dos principais componentes do motor de fluxo axial

Na figura 4.13 pode-se também observar que há um pequeno deslocamento angular entre os dois rotores. Sua finalidade é reduzir o chamado *cogging torque*, causado pela tendência de alinhamento entre os ímãs do rotor e os dentes do estator, e que impede uma rotação mais suave da máquina. Segundo especificação do fabricante, o deslocamento deve ser de  $12^\circ$  a  $13^\circ$ . Nestas simulações adotou-se o valor de  $12,5^\circ$ .

Os cálculos efetuados são do tipo magnetostático. Para esta condição, duas das três fases estarão excitadas em cada instante de tempo. Como as duas bobinas de cada fase estão ligadas em série, suas excitações seguem o padrão apresentado na figura 4.14.

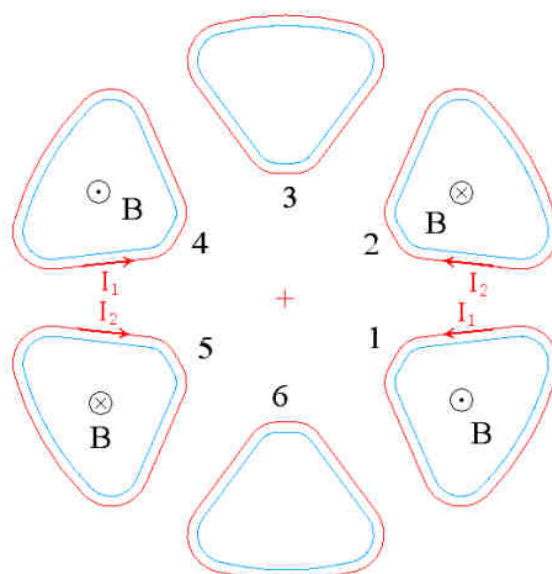


Figura 4.14: Ligação das bobinas no motor de fluxo axial

Observa-se que, neste caso, as bobinas 1 e 4 estão em série (e constituem a fase 1), bem como as bobinas 2 e 5 (fase 2), e 3 e 6 (fase 3). Portanto, por exemplo: tanto na bobina 1 como na 4, a corrente é a mesma e está em sentido anti-horário, gerando um fluxo que “sai” do plano do papel. As direções da corrente e do fluxo gerado nas bobinas 2 e 5 (fase 2) são opostas às da fase 1, e o circuito magnético se fecha entre as bobinas 1 e 2 e entre as bobinas 4 e 5.

As simulações foram feitas numa malha que possui 361007 elementos, 63053 nós, 424709 arestas e 722664 faces. Pode-se então passar ao cálculo dos circuitos magnéticos.

#### 4.4 Cálculos analítico e numérico

Inicialmente será considerada apenas uma bobina energizada com a corrente de 1 A, depois as duas bobinas da fase 1, sem levar em conta a influência dos ímãs. Em seguida, serão consideradas as fases 1 e 2 energizadas, com correntes de 1 A, 2 A e 3 A, ainda sem os ímãs. Por último, será apresentado o resultado da simulação com duas bobinas energizadas e levando em conta a influência dos ímãs no circuito magnético.

Segundo o projeto da máquina, foram utilizadas 116 espiras (em cada dente) do fio 20 AWG que, segundo sua especificação, possui secção transversal de  $0,51887 \text{ mm}^2$ .

O circuito magnético formado por duas bobinas quaisquer pode ser representado, de forma simplificada, de acordo com a figura 4.15.

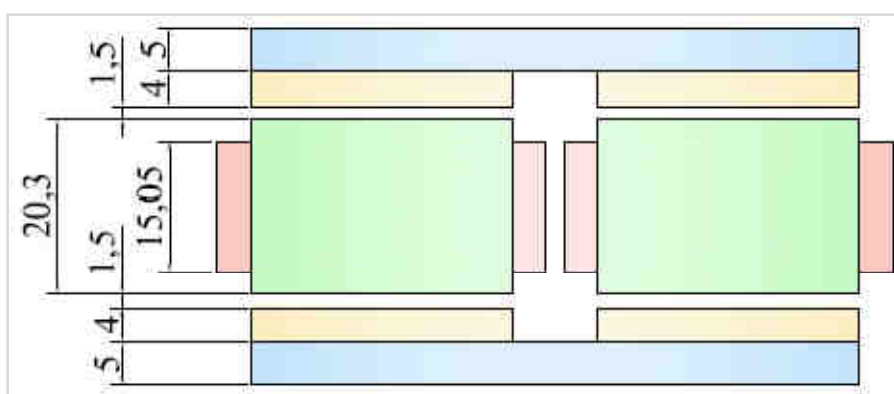


Figura 4.15: Circuito magnético simplificado entre dois dentes

Nesse desenho, os rotores estão representados em azul, as bobinas em vermelho, os dentes em verde e os ímãs em amarelo. Em relação aos ímãs, como sua posição relativa aos dentes muda conforme a posição do rotor, adotou-se uma simplificação: suas posições



e dimensões (em relação ao eixo horizontal da figura 4.15) serão considerados equivalentes às dos dentes mostrados.

#### 4.4.1 Uma bobina energizada

No primeiro cálculo considerou-se apenas uma bobina energizada, com corrente de 1 Ampère. Como se tem 116 espiras por bobina, a força magnetomotriz do circuito (em metade do rotor) vale 116 Ampère-espiras. Conforme já foi informado, a influência dos ímãs não será levada em consideração.

O circuito magnético do motor de fluxo axial pode ser simplificado, conforme a figura 4.16. Observa-se que, se apenas uma bobina está energizada, é necessário levar em conta os demais cinco dentes (sem corrente em suas bobinas). Cabe salientar que a simplificação não corresponde exatamente ao funcionamento da máquina, porém este é um caso tipicamente tridimensional, e não pode ser retratado com exatidão por uma análise bidimensional. Em todo caso, esta análise será feita a título de comparação com os valores obtidos numericamente, para que se tenha uma noção aproximada dos valores que podem ser obtidos.

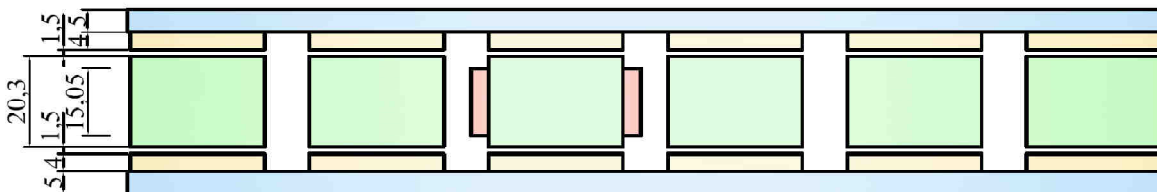


Figura 4.16: Circuito magnético simplificado para uma bobina energizada

Supondo-se que no lugar dos ímãs se tenha ar, e que o fluxo magnético passe pelo meio dos componentes ferromagnéticos do circuito, o comprimento dos entreferros entre cada dente e um dos rotores vale  $l_e = 5,5$  mm. Segundo a notação da figura 4.8, irá se considerar energizada a bobina que envolve o dente 1. Levando-se em conta apenas os campos no entreferro, a circulação do campo magnético através de dois dos dentes da máquina é a seguinte:

$$2 H_1 l_e + 2 H_2 l_e = n I \quad (4.25)$$

$$H_1 + H_2 = 10545,45 \text{ A/m} \quad (4.26)$$

Aplicando-se a conservação do fluxo nos seis dentes, e sabendo que todos possuem a mesma superfície (cujo vetor é paralelo à direção do fluxo), chega-se a:

$$\int_{\text{dente 1}} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=2}^6 \int_{\text{dente i}} \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{s} \quad (4.27)$$

Como a área dos dentes é sempre a mesma, as induções e campos magnéticos terão os mesmos valores nos dentes sem corrente na bobina. A indução e o campo magnético no dente com bobina energizada, em relação aos outros dentes, valem:

$$B_1 = 5 B_2 \quad (4.28)$$

$$H_1 = 5 H_2 \quad (4.29)$$

Assim, a expressão (4.26) se torna:

$$6 H_2 = 10545,45 \text{ A/m}$$

E os valores de campo magnético e indução nos dentes são:

$$H_2 = 1757,6 \text{ A/m} \quad (4.30)$$

$$H_1 = 8787,9 \text{ A/m} \quad (4.31)$$

$$B_2 = 2,209 \text{ mT} \quad (4.32)$$

$$B_1 = 11,043 \text{ mT} \quad (4.33)$$

A superfície dos dentes, conseqüentemente a dos entreferros, vale  $S_e = 645,29 \text{ mm}^2$ . Assim, o fluxo nos entreferros sobre os dentes cujas bobinas não estão energizadas valem:

$$\phi_2 = \int \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_e \quad (4.34)$$

$$\phi_2 = 1,425 \text{ } \mu\text{Wb} \quad (4.35)$$

O fluxo magnético no dente cuja bobina está energizada vale:

$$\phi_1 = 7,126 \mu\text{Wb} \quad (4.36)$$

O pós-processador desenvolvido requer que a superfície do dente seja representada por um quadrilátero, portanto foi escolhida a forma mostrada na figura 4.17, um quadrilátero que envolve o dente sobre o qual se desejam conhecer os valores de algumas grandezas eletromagnéticas.

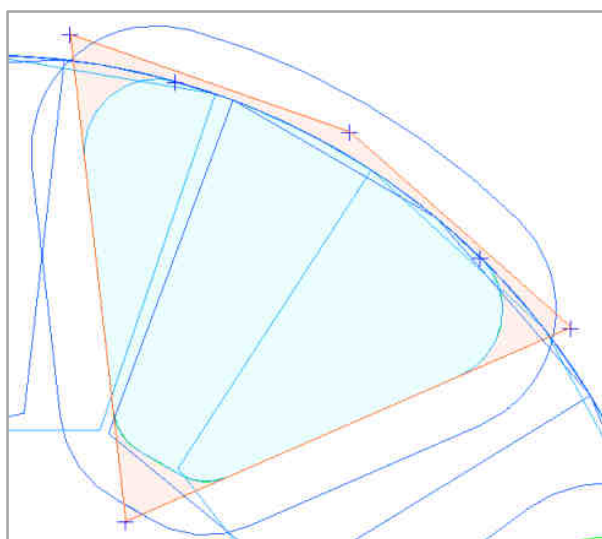


Figura 4.17: Superfície do dente (em azul) e quadrilátero (em azul e laranja)

Nessas condições, e posicionando-se o quadrilátero aproximadamente no meio da altura dos dentes sobre os quais as grandezas são calculadas, o programa fornece os seguintes valores de indução e fluxo:

$$B_1 = 23,39 \text{ mT}$$

$$B_2 = 5,52 \text{ mT}$$

$$\phi_1 = 15,56 \mu\text{Wb}$$

$$\phi_2 = 4,16 \mu\text{Wb}$$

Esses valores estão em torno de metade dos resultados obtidos com o cálculo analítico. Contudo, como a simplificação adotada não reflete com exatidão a estrutura analisada, podem-se considerar plausíveis os valores encontrados.

Observa-se que dessa forma, a indutância por fase vale, respectivamente para os cálculos analítico e numérico:

$$L_a = \frac{2n\phi}{I} = 9,09 \text{ mH}$$

$$L_n = \frac{2n\phi}{I} = 3,61 \text{ mH}$$

O valor fornecido pela Embraco é 3,9 mH. Como o valor obtido analiticamente parte de uma simplificação, pode ser considerado satisfatório. Observa-se também que, conforme era esperado, o resultado numérico é mais próximo ao real do que o analítico.

	Dente com bobina energizada			Dente sem corrente na bobina		
	Analítico	FEECAD	Erro (%)	Analítico	FEECAD	Erro (%)
Indução [mT]	11,043	23,39	191,9	2,209	5,52	149,9
Fluxo [ $\mu$ Wb]	7,126	15,56	118,4	1,425	4,16	191,9

Tabela 4.3: Comparação entre os resultados analítico e numérico, para a indução e o fluxo magnético, com uma bobina energizada na máquina de fluxo axial.

Valor fornecido pela empresa	Cálculo analítico		FEECAD	
Indutância [mH]	Indutância [mH]	Erro (%)	Indutância [mH]	Erro (%)
3,9	9,09	133,08	3,61	7,44

Tabela 4.4: Comparação entre os valores de indutância por fase (máquina de fluxo axial)

#### 4.4.2 Uma fase energizada

Para calcular a indutância por fase do circuito devem ser consideradas energizadas as duas bobinas de uma das fases. Dessa forma, o circuito simplificado é o apresentado na figura 4.12, porém com mais uma bobina alimentada. Neste caso, impôs-se a corrente de 1 Ampère nas bobinas 1 e 4.

Assim, pode-se efetuar o cálculo analítico levando em conta apenas a metade da máquina (três núcleos com bobinas), já que haverá simetria, ou se pode levar em conta a máquina inteira e utilizar o princípio da superposição, considerando o sistema como sendo linear. Será escolhida a segunda opção.

Assim, supondo-se alimentada a bobina que envolve o dente 1 e escolhendo um dos caminhos de fluxo, se tem, para a lei de Ampère:

$$2 H_1 e + 2 H_2 e = n I \quad (4.37)$$

$$H_1 + H_2 = \frac{n I}{2 e} \quad (4.38)$$

onde “e” é o entreferro de 5,5 mm e  $nI = 116$  A. Também se supõe que o fluxo gerado pela bobina 1 se distribui uniformemente nas outras bobinas. Assim, o campo magnético em todas as bobinas não energizadas tem o mesmo valor.

$$\phi_1 = 5 \phi_2 \quad (4.39)$$

$$B_1 S = 5 B_2 S \quad (4.40)$$

$$H_1 = 5 H_2 \quad (4.41)$$

Substituindo-se a expressão (4.41) em (4.38) obtém-se:

$$H_2 = \frac{n I}{12 e} = 1757,6 \text{ A/m} \quad (4.42)$$

$$H_1 = \frac{5 n I}{12 e} = 8787,9 \text{ A/m} \quad (4.43)$$

$$B_2 = 2,21 \text{ mT} \quad (4.44)$$

$$B_1 = 11,04 \text{ mT} \quad (4.45)$$

Agora será considerada energizada a bobina que envolve o dente 4. Nota-se que os resultados serão os mesmos que os acima calculados, mas que haverá uma inversão entre os valores no dente 1 e no dente 4. Seguindo-se o princípio da superposição, esses resultados serão somados, e como os fluxos estão em direções opostas em cada caso, tem-se que

$$B_1 = B_4 = 11,04 - 2,21 = 8,83 \text{ mT} \quad (4.46)$$

$$B_2 = 2,21 + 2,21 = 4,42 \text{ mT} \quad (4.47)$$

$$\phi_1 = \phi_4 = \mu_0 \frac{4}{12} \frac{n I}{e} S = 5,701 \mu\text{Wb}$$

Nos demais dentes,  $\phi = 2 (1,425 \mu\text{Wb}) = 2,850 \mu\text{Wb}$ .

Agora será apresentada a análise numérica para este caso. No FEEGID foram encontrados os valores 25 mT e 4 mT para a indução nos dentes 1 e 2, respectivamente. Os valores encontrados para o fluxo magnético são:

$$\phi_1 = 10,1 \mu\text{Wb}$$

$$\phi_2 = 1,5 \mu\text{Wb}$$

Observa-se que, novamente, os valores encontrados são diferentes dos valores oriundos do cálculo analítico, mas podem ser considerados coerentes. Deve-se salientar que o cálculo analítico não é acurado o suficiente para descrever com precisão o funcionamento do sistema estudado, e foi efetuado apenas para se ter uma idéia da ordem de grandeza dos valores calculados. As figuras 4.14 e 4.15 mostram a distribuição dos campos (representados pela indução magnética) na máquina. Ambas as figuras apresentam os resultados obtidos com o cálculo 3D. Na figura 4.15 são mostrados, numa vista lateral, os vetores de indução em metade da máquina (para facilitar a visualização, já que o cálculo foi efetuado na máquina inteira).

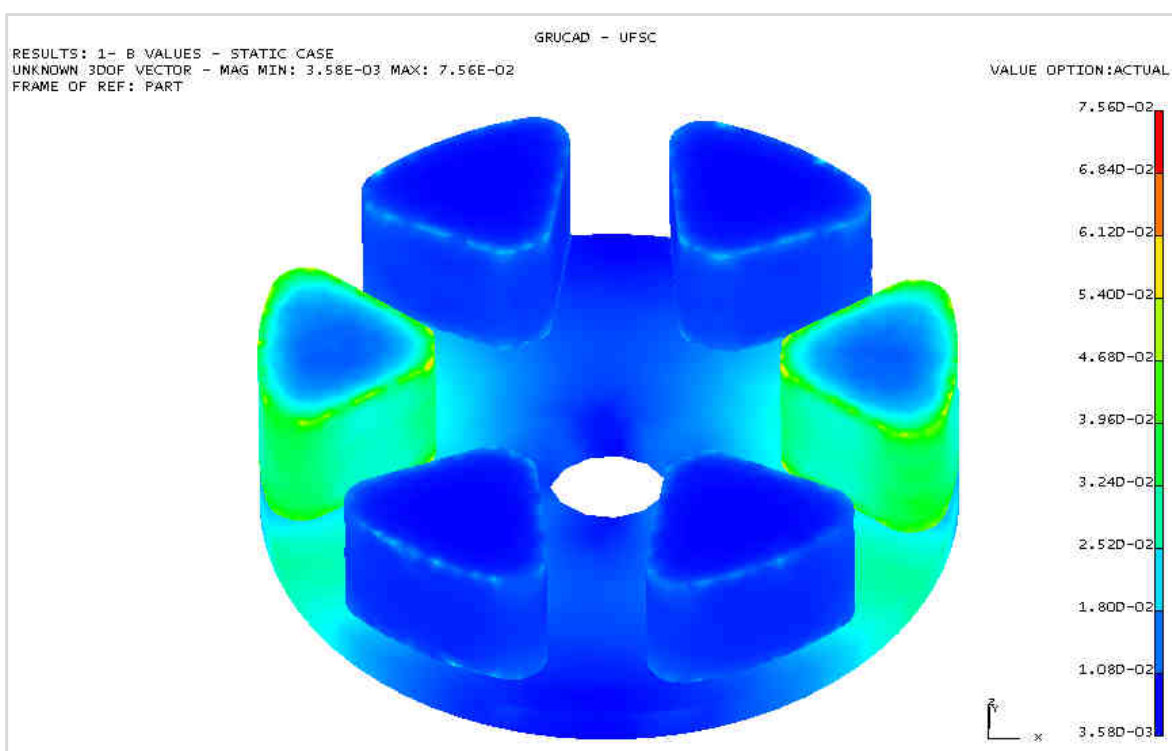


Figura 4.18: Densidade de fluxo magnético nos dentes e no rotor inferior da máquina

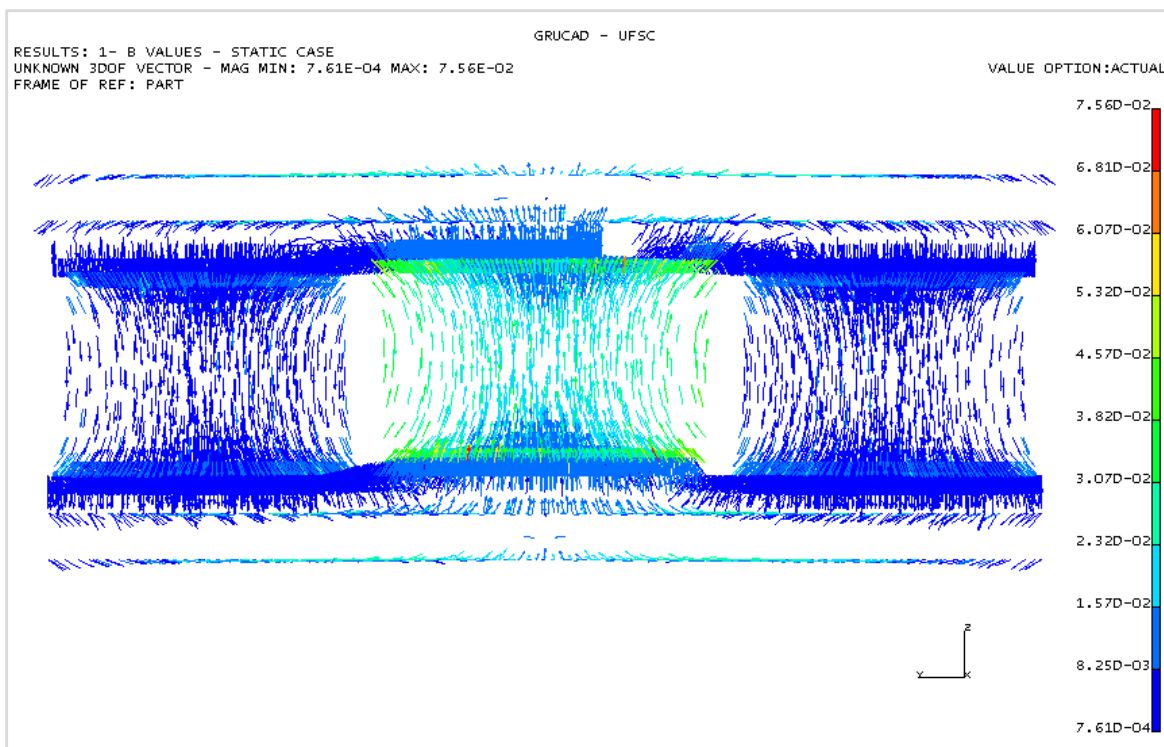


Figura 4.19: Indução magnética em metade da máquina, com uma fase alimentada

A tabela 4.5 apresenta uma comparação entre os valores obtidos com o cálculo analítico e os oriundos do cálculo numérico para este caso.

	Dente com bobina energizada			Dente sem corrente na bobina		
	Analítico	FEECAD	Erro (%)	Analítico	FEECAD	Erro (%)
Indução [mT]	8,83	25,0	182,98	4,42	4,0	9,45
Fluxo [ $\mu$ Wb]	5,701	10,1	77,17	2,850	1,5	47,38

Tabela 4.5: Comparação entre os resultados analítico e numérico, para a indução e o fluxo magnético, com uma fase energizada na máquina de fluxo axial.

#### 4.4.3 Duas fases energizadas

Numa situação real, duas fases estarão ligadas simultaneamente. Neste caso, foi inserida uma corrente de 1 Ampère nas bobinas 1 e 4, e -1 Ampère nas bobinas 2 e 5, para que as fases 1 e 2 produzam fluxos em direções opostas (em relação ao eixo z), de acordo com o esquema mostrado na figura 4.14. O circuito magnético tem a forma mostrada na figura 4.11, e envolve os dentes com corrente na bobina (por exemplo, os dentes 1 e 2), já

que os fluxos gerados por cada uma das bobinas estão em direções opostas e se anulariam nos dentes em cujas bobinas não há corrente. Assim, pode-se considerar a força magnetomotriz total como 232 Ampère-espira. Considerando-se os ímãs como ar (ou seja, cada entreferro entre um dos dentes e o rotor vale 5,5 mm), já que eles possuem permeabilidade relativa próxima à unidade (de fato,  $\mu_r = 1,1$ ) e, sem levar em conta o campo magnético presente na parte ferromagnética do circuito, obtém-se a seguinte expressão para a circulação dos campos:

$$2 H_1 e + 2 H_2 e = n I$$

Os campos  $H_1$  e  $H_2$  podem ser considerados iguais, logo:

$$0,022 H_1 = 232$$

$$H_1 = 10545,5 \text{ A/m}$$

Assim, os valores teóricos encontrados são  $H = 10545,5 \text{ A/m}$ ,  $B = 13,25 \text{ mT}$  e  $\phi = 8,55 \mu\text{Wb}$ . O valor de fluxo encontrado pelo pós-processador vale  $20,22 \mu\text{Wb}$ , e o da indução na direção paralela ao eixo z vale  $30 \text{ mT}$ . Ambos os valores são maiores que os calculados, porém como já foi explicado, o cálculo analítico bidimensional constitui uma simplificação grosseira do sistema real. Além disso, alguns fatores não foram levados em conta, como por exemplo a grande quantidade de ferro nos rotores da máquina, fator que oferece diversos caminhos para o fluxo magnético e pode inclusive diminuir a relutância do sistema. A tabela 4.6 compara os valores encontrados através do cálculo analítico aos encontrados por cálculo numérico. Na figura 4.20 pode-se visualizar a intensidade da indução magnética nos dentes e no rotor inferior da máquina estudada. A figura 4.21 apresenta os vetores correspondentes, sobre os dentes e os rotores, em metade da máquina (vista lateral).

	Cálculo analítico	FEECAD	Erro (%)
Indução [mT]	13,25	30,0	126,38
Fluxo [ $\mu\text{Wb}$ ]	8,55	20,22	136,46

Tabela 4.6: Comparação entre os resultados analítico e numérico, para a indução e o fluxo magnético, com duas fases energizadas na máquina de fluxo axial.



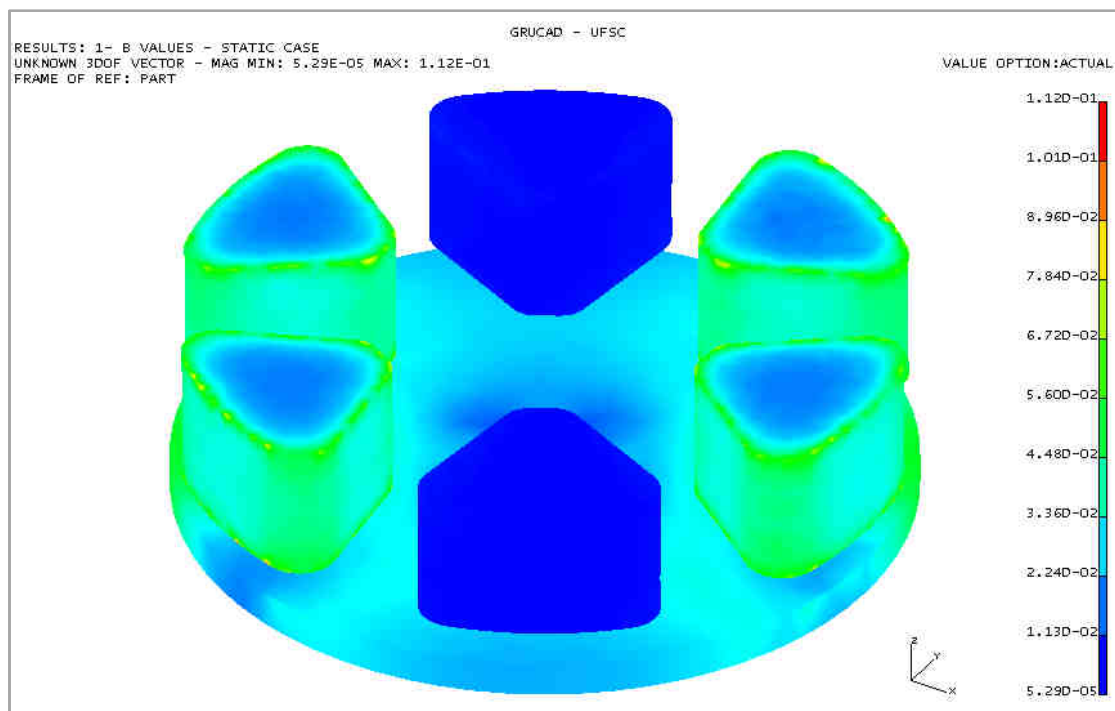


Figura 4.20: Fluxo magnético num motor de fluxo axial com excitação em duas fases

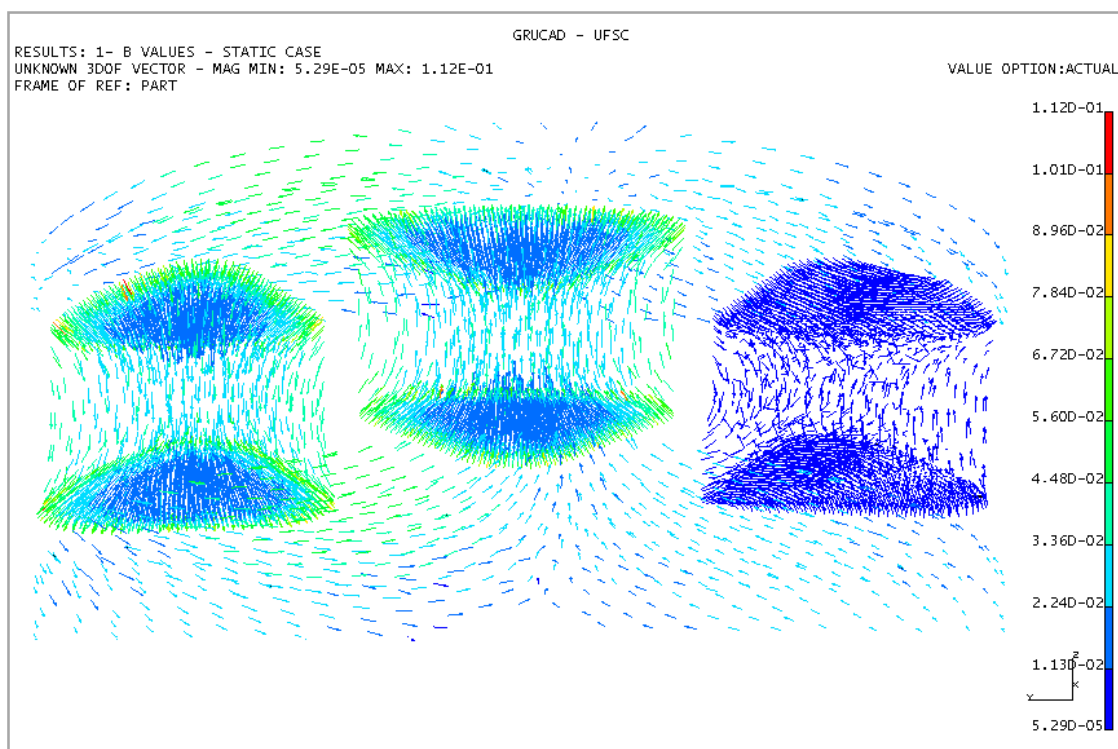


Figura 4.21: Vetores de indução nos dentes e rotores, em metade da máquina

Se a corrente aplicada nas bobinas for de 2 A ou 3 A, os valores da indução e do fluxo serão respectivamente duplicados e triplicados. Assim, para 2 A,  $B = 26,504$  mT e  $\phi = 17,102$   $\mu$ Wb, e para 3 A,  $B = 39,755$  mT e  $\phi = 25,654$   $\mu$ Wb. O programa encontra, para alimentação de 2 A, os valores  $B = 51,92$  mT e  $\phi = 40,43$   $\mu$ Wb no elemento do centro do quadrilátero escolhido; e para 3 A,  $B = 80$  mT e  $\phi = 60,80$   $\mu$ Wb. Uma comparação entre esses dados pode ser vista nas tabelas 4.7 e 4.8.

Pelos valores encontrados observa-se que as bobinas não levam o material magnético à saturação, e que a maior parte da indução presente na máquina em funcionamento se deve à atuação dos ímãs permanentes. Como a posição dos ímãs não corresponde à dos dentes (até pelo fato de as dimensões não serem equivalentes), o resultado de um cálculo analítico seria ainda mais grosseiro. Pode-se, no entanto, fazer uma análise da simulação considerando-se tanto a influência dos ímãs, quanto a das correntes nas bobinas. Este caso é mais próximo à realidade do funcionamento da máquina.

Na figura 4.22, referente a uma simulação na qual se impõe uma corrente de 1 A nas fases 1 e 2, observa-se a distribuição dos campos nos dentes, ímãs e rotores em metade da máquina. O mesmo vale para a figura 4.23, porém com a diferença de que neste caso a corrente aplicada é de 3 A.

Observa-se, nessas figuras, que agora a indução apresenta valores mais elevados, chegando, em alguns pontos, a aproximadamente 1,3 T, para a corrente de 1 A nas bobinas, e a aproximadamente 1,5 T, para a corrente de 3 A. A pequena diferença entre os valores máximos de indução confirma o fato de que a maior parte dos campos é devida aos ímãs, e não às bobinas.

	Cálculo analítico	FEECAD	Erro (%)
Indução [mT]	26,504	51,92	95,90
Fluxo [ $\mu$ Wb]	17,102	40,43	136,40

Tabela 4.7: Comparação entre os resultados analítico e numérico, para a indução e o fluxo magnético, com duas fases energizadas com 2 A na máquina de fluxo axial.

	Cálculo analítico	FEECAD	Erro (%)
Indução [mT]	39,755	80,0	101,23
Fluxo [ $\mu$ Wb]	25,654	60,80	137,0

Tabela 4.8: Comparação entre os resultados analítico e numérico, para a indução e o fluxo magnético, com duas fases energizadas com 3 A na máquina de fluxo axial.

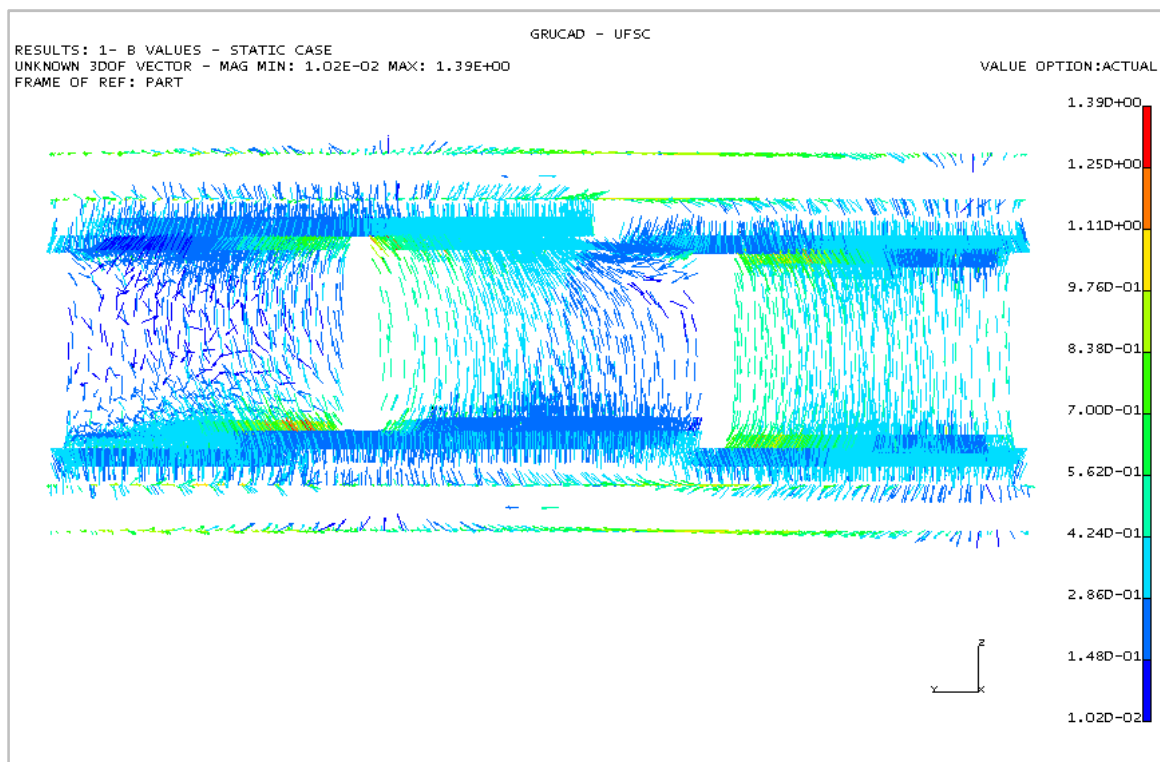


Figura 4.22: Indução magnética na máquina, com 1 Ampère nas fases 1 e 2

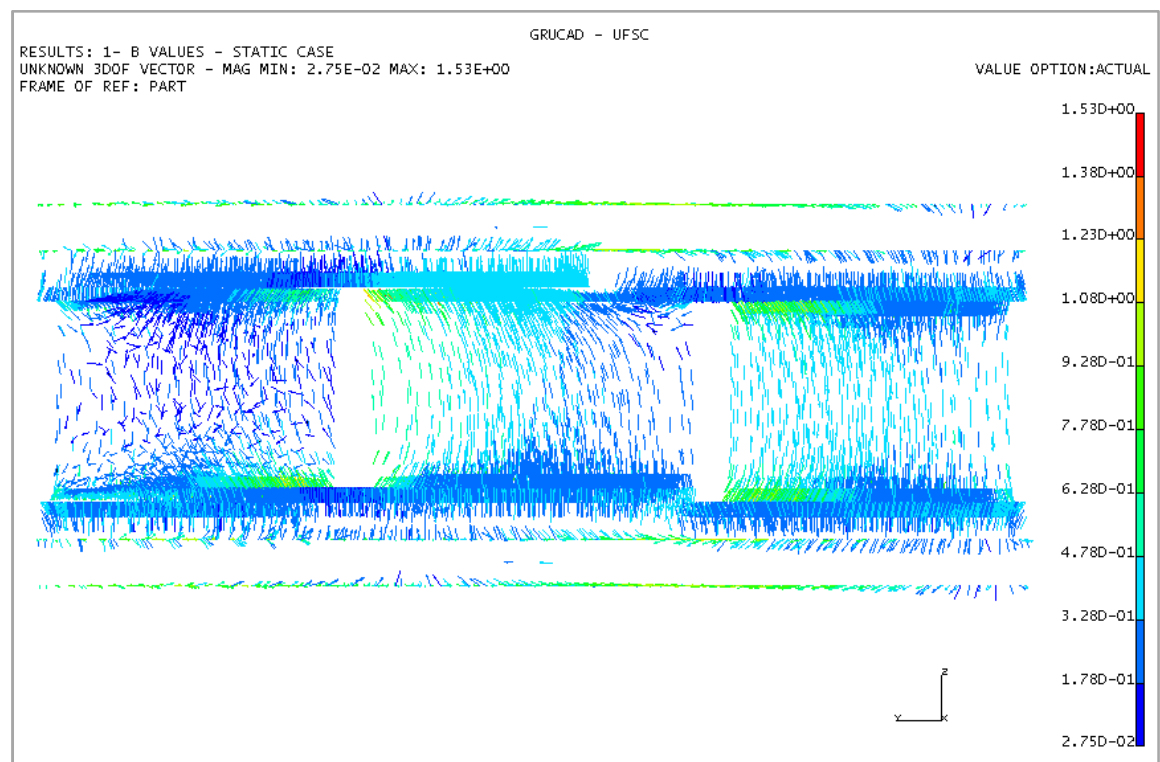


Figura 4.23: Distribuição dos campos na máquina, com 3 Ampères nas fases 1 e 2

## 5. Conclusões e perspectivas

---

### 5.1 Conclusões finais

O objetivo deste trabalho foi o desenvolvimento de um pós-processador para cálculos eletromagnéticos tridimensionais, capaz de avaliar grandezas em diferentes tipos de superfícies. Para isso, inicialmente se fez necessário um estudo das teorias que descrevem métodos numéricos de cálculo de campos em três dimensões. Em seguida, foi necessário estudar a teoria e alguns programas na linguagem de programação FORTRAN, na qual foi elaborado o pós-processador. Também foi indispensável o estudo da utilização do programa I-DEAS, para que se pudesse através dele fazer o pré-processamento e o pós-processamento gráfico das estruturas analisadas. Iniciou-se então o trabalho de programação propriamente dito, com os testes necessários à confirmação de seu funcionamento.

Ao longo do desenvolvimento do programa, este foi sendo testado com circuitos magnéticos simples, para que os valores pudessem ser comparados aos obtidos com os respectivos cálculos analíticos.

Quanto ao método de construção de árvores de arestas, observa-se que se trata de uma ferramenta simples de ser implementada e robusta, que não necessitou mais de cinco iterações para construir a árvore de uma malha com mais de trezentos mil elementos, e cerca de sessenta e três mil nós.

Finalmente, com o programa pronto, foi selecionada uma máquina cuja modelagem em duas dimensões não seria satisfatória, requerendo uma análise tridimensional. Foi estudado um motor de fluxo axial, para o qual foram executadas as etapas descritas nesta dissertação, desde o desenho, no *software* I-DEAS, até a avaliação de algumas grandezas com o pós-processador aqui desenvolvido, que foi sendo analisado e sofreu ainda algumas modificações para aperfeiçoar seu desempenho.

Com estas ferramentas, pode-se agora efetuar cálculos em estruturas que antes, com as limitações dos programas dos quais se dispunha, não permitiam um estudo detalhado. Os resultados obtidos forneceram valores plausíveis. Portanto pode-se afirmar que o pós-processador funciona corretamente, fornecendo valores próximos aos reais.

## 5.2 Perspectivas e sugestões de trabalhos futuros

Pode-se afirmar que o assunto desta dissertação, além de constituir uma continuidade nos trabalhos de cálculo numérico em eletromagnetismo que vêm sendo feitos no GRUCAD, foi um dos passos iniciais necessários à modelagem eletromagnética tridimensional de estruturas relativamente complexas. Pode-se sugerir alguns trabalhos futuros, para que se possam realizar mais tipos de simulações, proporcionando um estudo mais completo dos dispositivos que se deseje projetar.

No próprio pós-processador, poderiam ser contemplados mais tipos de superfícies de cálculo (curvas inclinadas em relação aos eixos cartesianos, ou mesmo superfícies esféricas, por exemplo). As superfícies planas também poderiam ser definidas por mais de quatro pontos.

Quanto à modelagem de máquinas elétricas, seria interessante implementar algum método de simulação do seu funcionamento em movimento, como a chamada “banda de movimento”, integrando-o aos módulos do FEECAD.

## 6. Referências Bibliográficas

---

- [1] BASTOS, J. P. A. “Cálculo Tridimensional de Campos Eletromagnéticos” – notas de aula.
- [2] BASTOS, J. P. A. “Eletromagnetismo para Engenharia: Estática e Quase Estática”. Florianópolis: Editora da UFSC, 2004.
- [3] BASTOS, J. P. A.; SADOWSKI, N. “Electromagnetic Modeling by Finite Element Methods”. New York: Marcel Dekker, 2003.
- [4] BIRO, O.; PREIS, K.; VRISK, G.; RICHTER, K. R.; TICAR, I. “Computation of 3D magnetostatic fields using a reduced scalar potential”. IEEE Trans. Mag., vol. 29, no. 2, 1993.
- [5] BOSSAVIT, A. “Electromagnétisme en vue de la modélisation”. Springer-Verlag, 1993.
- [6] BOSSAVIT, A. “Whitney’s forms: a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism”. IEE Proceedings, Vol 135, Part A, 1988.
- [7] CARPES Jr., W. P. “Introdução ao Método de Elementos Finitos: Formas de Whitney” – notas de aula.
- [8] DA LUZ, M. V. F. “Desenvolvimento de um software para cálculo de campos eletromagnéticos 3D utilizando elementos de aresta, levando em conta o movimento e o circuito de alimentação”. Florianópolis, 2003. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina.
- [9] EFCAD (Electromagnetic Field Computer Aided Design). Sistema para cálculo 2D de campos eletromagnéticos baseado no método de elementos finitos. UFSC, GRUCAD, Florianópolis.

- [10]FEECAD. Sistema para cálculo 3D de campos eletromagnéticos baseado no método de elementos finitos. UFSC, GRUCAD, Florianópolis.
- [11]GARCIA, J. S. D. "Cálculo 3D magnetostático em formulação potencial vetor utilizando o conceito de campo fonte". Florianópolis, 2007. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina.
- [12]GIERAS, J. F.; WING, M. "Permanent Magnet Motor Technology: Design and Applications". Marcel Dekker Inc., 2002. Pp. 311-351
- [13]IDA, N.; BASTOS, J. P. A. Electromagnetics and calculation of fields. 2nd Ed., New York: Springer-Verlag, 1997.
- [14]I-DEAS, *software* para simulações de dispositivos mecânicos utilizando o método de elementos finitos. Desenvolvido pela empresa Siemens ([www.siemens.com](http://www.siemens.com)).
- [15]LE MENACH, Y. "Contribution à la modélisation numérique tridimensionnelle des systèmes électrotechniques : prise en compte des inducteurs". Lille, 1999. Tese (Doutorado) - Université des Sciences et Technologies de Lille.
- [16]LE MENACH, Yvonnick ; CLENET, Stéphane ; PIRIOU, Francis. "Determination and utilization of the source field in 3D magnetostatic problems". IEEE Trans. Mag., vol. 34, 1998.
- [17]LE MENACH, Y. ; CLENET, S. ; PIRIOU, F. Influence du champ source dans la formulation en potentiel scalaire. NUMELEC'97, Lyon, pp 272-273, 1997.
- [18]TONTI, E. "Algebraic topology and computational electromagnetism. In: Proceedings of the Fourth International Workshop on the Electric and Magnetic Fields: from Numerical Models to Industrial Applications". Marseille: (s.n.), 1998. Pp. 284-294
- [19]WHITNEY, H. "Geometric integration theory". New Jersey: Princeton University Press, 1957.